

Forschungsnotiz — Verschränkung und die Bell-Ungleichung

Autor: Thomas Schüller · forschung@tschueller.com · ORCID 0009-0003-9799-6747 **Affiliation:** privat finanziert, ohne institutionelle Affiliation **Lizenz:** CC BY 4.0 · **Version:** 0.1 · **Datum:** 2026-05-17
Strang: FORSCHUNG / Quanten / Q2 Verschränkung **Werkzeug:** NEXUS · **Dokumenttyp:** Forschungsnotiz (Template v1.0) **Status:** abgeschlossener Test mit dokumentierter Bewertung

1. These

Modul Q1 (DUALITAS) endete mit einer Lücke: Der Formalismus sagt Messergebnisse voraus, erzählt aber keine Geschichte über das Dazwischen. Es liegt nahe, diese Lücke durch eine Annahme zu füllen — **die Teilchen tragen ihre Antworten von Anfang an mit sich, wir kennen sie nur nicht.** Das war Einsteins Position (EPR 1935): Die Quantenmechanik sei unvollständig, es fehle etwas.

Das geprüfte engere Modell M1 lautet: *„Lokaler Realismus. Jedes Teilchen trägt seine Antworten von Anfang an mit sich (Realismus), und was an einem Ort gemessen wird, hängt nicht davon ab, was am anderen eingestellt wird (Lokalität). Die Korrelationen sind durch gemeinsame Vorgeschichte erklärbar.“*

Die Behauptung dieses Moduls: M1 ist **nicht bloß unwahrscheinlich, sondern experimentell ausgeschlossen** — und zwar unabhängig davon, wie kompliziert man die verborgenen Variablen ansetzt. Bell (1964) verwandelte eine philosophische Frage in eine messbare.

Eine Vorbemerkung zur Reichweite dieser Notiz: Die Simulation bildet Vorhersagen nach. Sie beweist die Bell-Schranke nicht — das tat Bell analytisch — und schon gar nicht, dass die Natur sie verletzt. Das taten die Experimente. Wer aus einer Simulation, die die quantenmechanische Vorhersage einprogrammiert enthält, auf die Welt schließt, begeht einen Zirkelschluss.

2. Annahmen

1. Zwei Teilchen werden gemeinsam erzeugt und getrennt vermessen.
2. Auf jeder Seite wird eine von zwei Einstellungen gewählt, das Ergebnis ist ± 1 .
3. Ein lokal-realistisches Modell besteht aus einer gemeinsamen verborgenen Variable und zwei lokalen Antwortfunktionen.
4. Korrelationen sind als Mittelwerte über viele Paare messbar.
5. Endliche Stichproben haben Rauschen; die Schranke gilt für Erwartungswerte.

3. Mathematisches Modell

M1 — lokaler Realismus. Es existiert eine verborgene Variable λ mit Verteilung $\rho(\lambda)$ und Antwortfunktionen $A(a, \lambda), B(b, \lambda) \in \{-1, +1\}$, sodass $E(a, b) = \int A(a, \lambda) B(b, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$. **Entscheidend:** $A(a)$ hängt nicht von b ab und $B(b)$ nicht von a — das ist die Lokalitätsbedingung.

M2 — die CHSH-Ungleichung. Für die Größe $|S| = E(a_1, b_1) - E(a_1, b_2) + E(a_2, b_1) + E(a_2, b_2)$ gilt in **jedem** solchen Modell: $|S| \leq 2$.

M3 — die Quantenvorhersage. Für den Singulett-Zustand ist $E(a, b) = -\cos(a-b)$. Mit $a_1=0$, $a_2=\pi/2$, $b_1=\pi/4$, $b_2=3\pi/4$ folgt $|S| = 2\sqrt{2} \approx 2,828$ (Tsirelson-Schranke).

M4 — Stichprobenrauschen. Jeder Korrelator hat bei N Paaren einen Standardfehler von etwa $1/\sqrt{N}$; für S als Summe von vier gilt $\mathrm{SE}(S) \approx 2/\sqrt{N}$.

Symbol	Bedeutung	Einheit
λ	verborgene Variable	—
$E(a, b)$	Korrelation	—
S	CHSH-Größe	—
SE	Standardfehler	—

4. Parameter

Szenario	Setup
A CHSH	optimale Winkel; LHV-Modell mit N von 1 000 bis 1 000 000; zusätzlich 300 zufällige Winkelsätze
B Winkel	Korrelation über 0° bis 180° , Quantenvorhersage gegen bestes lineares Modell
C Kein Signal	Alice fest bei 0° , Bob bei sechs Einstellungen, je 200 000 Paare

Toleranz: $\epsilon = 0$ in A und B, $\{0, 01\}$ in C.

5. Vorhersage

Szenario	Erwartung
A	QM erreicht 2,828; LHV bleibt innerhalb weniger Standardfehler von 2
B	Übereinstimmung bei $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$; Abweichung dazwischen
C	Alices Verteilung unabhängig von Bobs Einstellung

6. Falsifikationskriterium

M1 ist widerlegt, wenn die gemessene CHSH-Größe die Schranke 2 **signifikant** überschreitet — also um ein Vielfaches des Standardfehlers. Ein einzelner Wert knapp über 2 genügt nicht.

7. Konkurrenzmodelle

- **K1 — lokaler Realismus (M1):** geprüft, engeres Modell; die Position von EPR.
- **K2 — Quantenmechanik:** sagt $\sqrt{2}$ voraus, ohne verborgene Variablen.
- **K3 — nichtlokale verborgene Variablen (Bohm):** rettet den Realismus, gibt die Lokalität auf. Nicht durch Bell ausgeschlossen.
- **K4 — Viele-Welten:** rettet die Lokalität, gibt eindeutige Ergebnisse auf. Ebenfalls nicht ausgeschlossen.
- **K5 — Superdeterminismus:** die Messeinstellungen wären nicht frei wählbar. Nicht falsifizierbar und daher wissenschaftstheoretisch problematisch.
- **K6 — PR-Boxen:** hypothetische Korrelationen mit $(|S| = 4)$, die kein Signal erlauben würden. Die Natur nutzt sie nicht — warum, ist offen.

8. Versagensbereich

- **Die Simulation beweist nichts über die Welt.** Sie rechnet ein lokal-realistisches Modell durch und zeigt, dass es die Schranke einhält. Dass die Natur sie verletzt, zeigten Experimente.
- **Das LHV-Modell ist eines von vielen.** Bells Beweis gilt allgemein; hier wird ein konkretes Beispiel gerechnet, kein allgemeiner Beweis geführt.
- **Idealisierte Bedingungen.** Perfekte Detektoren, keine Verluste, exakte Winkel.
- **Schlupflöcher.** Bis 2015 blieben zwei: das Detektions-Schlupfloch (nicht alle Paare erfasst) und das Lokalitäts-Schlupfloch (Einstellungen könnten sich abstimmen). Beide wurden 2015 in drei unabhängigen Experimenten gleichzeitig geschlossen. **Superdeterminismus bleibt prinzipiell offen** — er ist aber nicht falsifizierbar.
- **Keine Deutung.** Was stattdessen der Fall ist, wenn lokaler Realismus ausfällt, bleibt offen (Modul W2).
- **Nicht behandelt:** GHZ-Zustände (Widerlegung ohne Statistik), Verschränkungsmaße, Anwendungen in der Quantenkryptografie.

9. Simulation

Numerische Auswertung in `nexus_simulation.py`:

1. Szene A: CHSH für die Quantenvorhersage; explizites LHV-Modell für vier Stichprobengrößen mit Standardfehler und Signifikanzprüfung; Suche über 300 zufällige Winkelsätze.
2. Szene B: Korrelation über den Winkelbereich, Quantenvorhersage gegen bestes lineares Modell; Bestimmung der maximalen Abweichung.
3. Szene C: Marginalverteilungen bei sechs Einstellungen Bobs; Streuung über alle Einstellungen.

Ergebnisse in `nexus_results.json`, Plot als `nexus_szenen.svg`.

10. Ergebnis

10.1 A — Die CHSH-Schranke

Modell	$\backslash(S)$
lokaler Realismus (Schranke)	2,000
Quantenmechanik	2,828427
algebraisches Maximum	4,000

Überschreitung der klassischen Schranke: **41,42 %**.

Das explizite LHV-Modell mit Signifikanzprüfung:

N	$\backslash(S)$	SE	σ über 2	signifikant
1 000	-1,9980	0,063	-0,03	nein
10 000	-1,9828	0,020	-0,86	nein
100 000	-2,0080	0,006	+1,26	nein
1 000 000	-1,9992	0,002	-0,42	nein

Bestes Ergebnis bei 300 zufälligen Winkelsätzen: 2,0161 — das sind **1,14 σ** über der Schranke, also Rauschen.

Bewertung M1: widerlegt (durch die Experimente, nicht durch diese Rechnung).

10.2 B — Winkelabhängigkeit

Winkel	QM	bestes lineares Modell	Differenz
0°	-1,0000	-1,0000	0,0000
22,5°	-0,9239	-0,7500	0,1739
39,5°	—	—	0,2105 (max)
45°	-0,7071	-0,5000	0,2071
90°	0,0000	0,0000	0,0000
180°	+1,0000	+1,0000	0,0000

Bewertung M1: widerlegt.

10.3 C — Kein Signal

Alice fest bei 0°:

Bobs Einstellung	P(Alice = +1)	Korrelation
0°	0,5006	-1,0000
45°	0,5015	-0,7051
90°	0,4993	+0,0003
180°	0,4985	+1,0000

Streuung von P(Alice = +1): 0,003 — reines Stichprobenrauschen.

Bewertung: Abgrenzung bestätigt.

11. Bewertung

M1 („lokaler Realismus“) ist widerlegt — aber es lohnt sich, genau zu sagen, wodurch und in welchem Sinn.

Szene A zeigt die Schranke und ihre Verletzung. Die Quantenmechanik sagt $\backslash(|S| = 2\sqrt{2}) = 2\{,}828\backslash$ voraus, 41 % über der klassischen Schranke. Das ist kein knapper Effekt, sondern ein deutlicher.

Das explizite lokal-realistische Modell hält die Schranke ein — in allen vier Stichprobengrößen und bei 300 zufälligen Winkelsätzen.

Bemerkenswert ist der Fall $N = 100\,000$: Dort liefert das Modell $\langle |S| = 2\sqrt{2} \rangle$, also scheinbar über der Schranke. Das ist **kein Verstoß**, sondern Stichprobenrauschen: Der Standardfehler beträgt 0,006, die Überschreitung liegt bei $1,26\sigma$. Die Bell-Schranke gilt für **Erwartungswerte**, nicht für endliche Stichproben.

Dieser Punkt ist mehr als eine Fußnote. Er erklärt, warum echte Bell-Experimente Signifikanzangaben machen müssen und warum die schlupflochfreien Tests von 2015 so aufwendig waren — Hensen et al. berichteten eine Verletzung mit $p = 0,039$, was nach heutigen Maßstäben knapp ist. Wer in einer Simulation einen Wert von 2,008 sieht und daraus einen Befund macht, hat das Rauschen für Signal gehalten.

Entscheidend ist der Umfang von Bells Beweis. Die Rechnung hier prüft **ein** lokal-realistisches Modell. Bell bewies analytisch, dass **kein** solches Modell $\langle |S| > 2\sqrt{2} \rangle$ erreichen kann — unabhängig davon, wie kompliziert $\langle \lambda \rangle$ gewählt wird, wie viele Dimensionen es hat, welche Verteilung es folgt. Die Schranke folgt aus Lokalität und Realismus allein. Deshalb ist die experimentelle Verletzung so wirkmächtig: Sie schließt nicht ein Modell aus, sondern eine ganze Klasse.

Szene B enthält die historische Pointe. Bei 0° , 90° und 180° stimmen Quantenvorhersage und bestes lokal-realistisches Modell **exakt** überein. Erst dazwischen weichen sie ab, maximal um $0,21$ bei $39,5^\circ$.

Das erklärt, warum die Diskrepanz so lange unbemerkt blieb. Wer nur bei den „natürlichen“ Winkeln misst — parallel, senkrecht, entgegengesetzt —, sieht keinen Unterschied. **Man muss die richtigen Winkel wählen, um überhaupt etwas zu sehen.** Genau das ist Bells eigentliche Leistung: Er zeigte nicht nur, dass es einen Unterschied gibt, sondern **wo** man messen muss, um ihn zu finden.

Einsteins Position war deshalb nicht abwegig, sondern die naheliegende. Dass Teilchen ihre Eigenschaften mitbringen und wir sie nur nicht kennen, ist die Erklärung, die man in jedem klassischen Kontext geben würde — bei Handschuhen in zwei Koffern etwa. Bell verwandelte diese philosophische Position in eine **prüfbare Aussage**. Das ist der seltene Fall, dass eine Grundlagenfrage entscheidbar wurde.

Szene C grenzt ab, was die Widerlegung bedeutet. Alices Ergebnisverteilung bleibt bei allen Einstellungen Bobs praktisch unverändert (Streuung 0,003, reines Rauschen). Die **Korrelation** ändert sich — die **Einzelergebnisse** nicht.

Daraus folgt: **Verschränkung erlaubt keine Signalübertragung.** Alice sieht ihre Hälfte immer als reinen Zufall. Erst wenn beide ihre Daten zusammenlegen — und das erfordert klassische Kommunikation — zeigen sich die Korrelationen.

Das ist dieselbe Struktur wie beim Quantenradierer aus Q1: Das lokal Beobachtbare ändert sich nie, erst die nachträgliche Zusammenführung zeigt die Struktur. **„Spukhafte Fernwirkung“ ist als Bild irreführend**, wenn man dabei an Übertragung denkt. Was Bell zeigt, ist nicht, dass etwas übertragen wird, sondern dass die Korrelationen **nicht durch gemeinsame Vorgeschichte erklärbar** sind. Das ist eine Aussage über Erklärbarkeit, nicht über Wirkung.

Was bleibt offen. Die Widerlegung schließt lokalen Realismus aus — nicht mehr. Wer die Lokalität aufgibt, kann den Realismus behalten (Bohm). Wer eindeutige Messergebnisse aufgibt, kann die Lokalität

behalten (Viele-Welten). Beide sind nicht ausgeschlossen, und beide machen **dieselben Vorhersagen**.

Damit vertieft sich die Lücke aus Q1, statt sich zu schließen. Dort zeigte sich: Der Formalismus erzählt keine Geschichte über das Dazwischen. Hier zeigt sich: **Die naheliegendste Geschichte — dass die Antworten schon feststanden — ist ausgeschlossen**. Was stattdessen der Fall ist, bleibt Deutungsfrage.

Das ist die dritte Stelle, an der die Werkstatt auf dasselbe Muster stößt. In **M1 (CATENA)** bestimmte die Ausgabe den Reiz nicht eindeutig. Im **Wahrnehmungs-Strang** sehen wir nicht den Reiz, sondern die beste Deutung. In **Q1 und Q2**: Die Theorie sagt Ergebnisse voraus und schließt Erklärungen aus, ohne eine an ihre Stelle zu setzen. Ob das ein Mangel der Theorie oder eine Eigenschaft der Welt ist, ist der Gegenstand von W2.

12. Nächster Test

Modul W1 (Messen, Deuten, Anwenden) und W2 (Die Deutungen) als Abschluss der Werkstatt. Q1 und Q2 haben gemeinsam die Grundlage gelegt: Sie zeigen präzise, wo die Erklärungslücke liegt und welche Füllungen ausgeschlossen sind.

Mögliche Erweiterung v0.2: GHZ-Zustände (Widerlegung ohne Statistik, mit einem einzigen Messergebnis); Verschränkungsmaße; Quantenkryptografie als Anwendung; die Schlupflöcher im Detail; PR-Boxen und die Frage, warum die Natur nur bis $\sqrt{2}$ geht.

Anhang A — Querverweise

- Praxis-Erklärung: PRAXIS-Nexus.md · Begleitpapier: BEGLEITPAPIER-Nexus.md
- Werkzeug: NEXUS.html
- Code: nexus_simulation.py · Plot: nexus_szenen.svg · Daten: nexus_results.json
- **Anschluss-Module:** Q1 Doppelspalt (die Lücke), M1 Signalkette (Nichteindeutigkeit)
- **Geplant:** W1/W2 Wissenschaftsphilosophie

Anhang B — Externer Bestandscheck

- **Einstein, Podolsky & Rosen (1935)** — die Unvollständigkeitsthese.
- **Bell (1964)** — die Ungleichung.
- **Clauser, Horne, Shimony & Holt (1969)** — die CHSH-Form.
- **Aspect et al. (1982)** — der erste überzeugende Test.
- **Hensen et al., Giustina et al., Shalm et al. (2015)** — schlupflochfreie Tests.
- **Nobelpreis 2022** an Aspect, Clauser und Zeilinger.

Was die Werkstatt-Notiz davon unterscheidet: die explizite Signifikanzbehandlung, die zeigt, warum ein LHV-Lauf knapp über 2 kein Befund ist; die Herausarbeitung, dass die Übereinstimmung an den Randwinkeln die historische Verzögerung erklärt; die konsequente Abgrenzung zwischen „Erklärung ausgeschlossen“ und „Wirkung übertragen“; die Einordnung als dritte Stelle desselben Werkstatt-Musters.

Anhang C — Quellen

- Einstein, A.; Podolsky, B.; Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review* 47:777–780.
- Bell, J. S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics* 1:195–200.
- Clauser, J. F.; Horne, M. A.; Shimony, A.; Holt, R. A. (1969). Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical Review Letters* 23:880–884.
- Aspect, A.; Dalibard, J.; Roger, G. (1982). Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Physical Review Letters* 49:1804–1807.
- Hensen, B. et al. (2015). Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature* 526:682–686.

Wortzahl: ca. 2100 · Seiten: 9 · Version 0.1 · 2026-05-17