

Forschungsnotiz — Kameramodell

1D, 2D und 3D am Beispiel der Kamera

Autor: Thomas Schüller **Kontakt:** forschung@tschueller.com **ORCID:** 0009-0003-9799-6747
Affiliation: privat finanziert, ohne institutionelle Affiliation **Lizenz:** CC BY 4.0 **Version:** 0.1
Datum: 2026-05-06 **Strang:** FORSCHUNG / Höhlengleichnis-Optiklabor / 04 Kameramodell
Dokumenttyp: Forschungsnotiz (Anwendung von Template v1.0) **Status:** abgeschlossener
Test mit dokumentierter Bewertung

Vorbemerkung

Diese Notiz ist eine Zusammenführung von drei Modellebenen, die in der Optik üblicherweise getrennt behandelt werden, in der Kamera aber natürlich verbunden sind: die eindimensionale Beschreibung der Brennweite (Linsengleichung), die zweidimensionale perspektivische Projektion (Pinhole-Modell) und die dreidimensionale Tiefenschärfe. Die Kamera wird zum Anker, weil sie alle drei Modellebenen gleichzeitig in einem Gerät auswertet, das der Alltag kennt.

Drei Stufen, drei Falsifikationskriterien, drei separate Toleranzen.

1. These

(1D) Die Brennweite einer Linse wird durch die Linsenmacher-Gleichung für dünne Linsen innerhalb einer Toleranz ε_{1D} vorhergesagt; jenseits der dünnen-Linsen-Annahme ist eine Dicke-Korrektur erforderlich. (2D) Die ideale Pinhole-Projektion bildet 3D-Welt-Punkte auf 2D-Bildkoordinaten innerhalb einer Toleranz ε_{2D} ab; bei realen Objektiven mit nicht vernachlässigbarer Verzeichnung ist eine Korrektur erster Ordnung (Brown-Conrady) erforderlich. (3D) Die analytische Tiefenschärfe-Vorhersage (Hyperfokal, Nah- und Ferngrenze) ist intern konsistent: an Nah- und Ferngrenze stimmt der berechnete Zerstreuungskreis genau mit der vorab gewählten Toleranz c überein.

2. Annahmen

Pro Stufe getrennt; geteilte Annahmen sind explizit benannt.

Geteilt (1D, 2D, 3D): Skalare Wellenoptik in der paraxialen Näherung, monochromatisches Licht (alle Stufen sind monochromatisch dargestellt; Chromatik in einem späteren Modul).

1D — dünne Linse: Linsendicke $d \ll f$ (Schwellwert $d/f < 0,05$); rotationssymmetrisch um optische Achse; homogenes Glas.

2D — Pinhole: Lochkamera-Modell mit unendlich kleiner Apertur und scharfer Abbildung; kein Verzeichnungsterm; rechtwinklige Sensorebene.

3D — Tiefenschärfe: Fokussierter Kreis hat den Durchmesser c (Zerstreuungskreis-Toleranz, vorab gewählt); Hyperfokaldistanz $H = f^2/(Nc) + f$.

3. Mathematisches Modell

1D — Linsengleichung.

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{dünn}), \quad \frac{1}{f} = (n-1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{n R_1 R_2} \right] \quad (\text{dick})$$

mit Bildabstand $b = gf/(g-f)$ (Gauss).

2D — Pinhole-Projektion.

$$u = c_x + f \cdot \frac{X}{Z} \cdot \frac{N_{\text{px}}^x}{S^x}, \quad v = c_y + f \cdot \frac{Y}{Z} \cdot \frac{N_{\text{px}}^y}{S^y}$$

mit Brown-Conrady-Verzeichnung erster Ordnung für M2:

$$x_d = \frac{X}{Z} (1 + k_1 r^2), \quad r^2 = \left(\frac{X}{Z} \right)^2 + \left(\frac{Y}{Z} \right)^2.$$

3D — Tiefenschärfe.

$$H = \frac{f^2}{N_c} + f, \quad s_{\text{nah}} = \frac{s(H-f)}{H+s-2f}, \quad s_{\text{fern}} = \frac{s(H-f)}{H-s},$$

$$c(s_{\text{obj}}) = \frac{f^2 \cdot |s_{\text{obj}} - s|}{N_{s_{\text{obj}}} (s - f)} \quad (\text{Selbstfalsifikations-Probe}).$$

4. Parameter

Stufe	Parameter	Wert
1D dünn	R_1, R_2, n, d	+50, −50, 1,517, 2 mm
1D dick	R_1, R_2, n, d	+50, −50, 1,517, 20 mm
1D	g, ε_{1D}	200 mm, 2%
2D	f, k_1	50 mm, −0,15
2D	Sensor / Bild	36×24 mm / 6000×4000 px
2D	Test-Punktwolke	5×5 Gitter $\pm 300, \pm 200$ mm bei $Z = 1000$ mm
2D	ε_{2D}	5 px
3D	f, N	50 mm, $f/2,8$
3D	s, c	2000 mm, 0,030 mm
3D	$\varepsilon_{3D}^{\text{CoC}}$	5% relativer Zerstreuungskreis

Toleranzen vorab festgelegt. $\varepsilon_{1D} = 2\%$ wegen typischer Linsen-Toleranzen kommerzieller Optiken; $\varepsilon_{2D} = 5$ px entspricht etwa 0,03 mm Sensor — knapp über typischer Pixelgrößen-Auflösung; $\varepsilon_{3D}^{\text{CoC}} = 5\%$ liegt deutlich über numerischen Diskretisierungsgrenzen.

5. Vorhersage

Größe	Vorhergesagt
1D dünn: $f_{\text{dünn}}$	48,36 mm
1D dünn: $b_{\text{dünn}}$	63,78 mm
1D dick: $f_{\text{dünn}}$ vs. f_{dick}	gleichgroße Differenz $> \epsilon_{1D}$ erwartet
2D: maximale Pixel-Abweichung Pinhole vs. verzerrt	$> \epsilon_{2D}$ erwartet
3D: Hyperfokal H	29,81 m
3D: Nahgrenze s_{nah}	1,877 m
3D: Ferngrenze s_{fern}	2,140 m
3D: Tiefenschärfe gesamt	263 mm
3D: $c(s_{\text{nah}})$ und $c(s_{\text{fern}})$	$\approx 0,030$ mm

6. Falsifikationskriterien

1D. Die Brennweite des dicke-Linsen-Modells weicht um $> \epsilon_{1D} = 2\%$ vom dünn-Linsen-Modell ab.

2D. Die maximale Pixel-Abweichung zwischen idealer und verzerrter Projektion über den Test-Punkt Wolke ist $> \epsilon_{2D} = 5$ px.

3D. Der berechnete Zerstreuungskreis an der Nah- bzw. Ferngrenze weicht um $> 5\%$ relativ von der vorab gewählten Toleranz c ab.

Die 3D-Falsifikation ist eine Selbstkonsistenz-Probe: das analytische Modell und die punktweise Auswertung müssen am Schärfentiefe-Rand exakt zusammenfallen, sonst ist die Implementation oder die Formel inkonsistent. Diese Probe ist methodisch wichtig, weil die meisten DoF-Calculator-Tools nur die analytische Formel nutzen, ohne sie gegen die punktweise Definition zu prüfen.

7. Konkurrenzmodelle

1D. - K1 dünne Linse (M1): das geprüfte engere Modell. - K2 dicke Linse (M2): Linsenmacher mit Dicke-Korrektur. - K3 ABCD-Strahlmatrix: vollständige paraxiale Behandlung mit Hauptebenen. - K4 Ray-Tracing: vollständig ohne paraxiale Annahme.

2D. - K1 ideales Pinhole (M1): das geprüfte engere Modell. - K2 Brown-Conrady erster Ordnung (M2): radiale Verzeichnung $1 + k_1 r^2$. - K3 OpenCV-Modell: k_1, k_2, p_1, p_2, k_3 , plus tangentielle Verzeichnung. - K4 Fish-Eye-Modell: nicht-perspektivische Projektion (bei extremen Weitwinkeln).

3D. - K1 Standardformel (M1): $s_{\text{nah}}, s_{\text{fern}}, H$. - K2 punktweise Zerstreuungskreis-Auswertung (M2): pro Distanz. - K3 Beugungsbegrenzte DoF: Airy-Scheibchen $1,22\lambda N$ als untere Grenze von c .

8. Versagensbereich

1D. $d/f > 0,1$ (dicke Objektive); zusammengesetzte Optiken; nicht-rotationssymmetrische Linsen.

2D. Bildwinkel $> 60^\circ$ (Weitwinkel mit starker Verzeichnung); Fish-Eye-Objektive; Mehrfachreflektionen.

3D. Aperturen nahe Beugungsgrenze ($N \cdot \lambda \approx c$); off-axis-Strahlen mit ausgeprägter Astigmatismus.

9. Simulation

Numerische Auswertung in `kameramodell_simulation.py`.

1D. Linsenmacher-Gleichung dünn und dick getrennt ausgewertet, Bildabstand jeweils berechnet.

2D. Test-Punktwolke (5×5 Gitter, $Z = 1$ m) projiziert mit beiden Modellen; pro Punkt die Pixel-Differenz, Maximum und Mittelwert über die Wolke.

3D. Adaptives Gitter um die analytisch vorhergesagten Nah- und Ferngrenzen (verfeinert auf ± 20 mm), Zerstreuungskreis pro Distanz; Probe: $c(s_{\text{nah}})$ und $c(s_{\text{fern}})$ gegen die vorab gewählte Toleranz.

10. Ergebnis

10.1 1D

Linse	$f_{\text{dünn}}$	f_{dick}	$\Delta f/f$	Bewertung
dünn ($d = 2$ mm)	48,36 mm	48,69 mm	0,69%	gestützt
dick ($d = 20$ mm)	48,36 mm	51,89 mm	7,31%	widerlegt

10.2 2D

Größe	Wert
max. Pixel-Abweichung	58,6 px
mittlere Pixel-Abweichung	23,9 px
Toleranz ε_{2D}	5 px
Bewertung	widerlegt (erwartet bei $k_1 = -0,15$)

10.3 3D

Größe	Wert
Hyperfokal H	29,81 m
Nahgrenze	1,877 m
Ferngrenze	2,140 m
Tiefenschärfe	263 mm
c an Nahgrenze	0,03003 mm
c an Ferngrenze	0,02998 mm
Toleranz c	0,030 mm
Bewertung	gestützt (CoC trifft an beiden Rändern 0,1% genau)

Visualisierungen: `kameramodell_1d_focal.svg`, `kameramodell_2d_projection.svg`, `kameramodell_3d_dof.svg`

11. Bewertung

1D. Das dünne-Linsen-Modell ist für tatsächlich dünne Linsen ($d/f \lesssim 0,05$) angemessen. Bei einem 20-mm-dicken Glaskörper mit den gegebenen Krümmungen wird die Brennweite um 7,3% falsch berechnet, was nahezu vier ε_{1D} entspricht. Konsequenz: kommerzielle

Mehrelement-Objektive mit etwa 50 mm Brennweite und 60-100 mm Bauttiefe lassen sich mit der dünnen-Linsen-Formel nicht korrekt vorhersagen. Sie verlangen entweder die dicke-Linsen-Korrektur oder die ABCD-Strahlmatrix.

2D. Das ideale Pinhole-Modell ist für korrigierte Telezoom-Objektive eine gute Näherung; sobald aber typische Weitwinkel-Verzeichnung ($k_1 = -0,15$, was Smartphone-Front-Kameras nahekommt) ins Spiel kommt, sind die Pixelfehler an den Bildrändern bei einem Vollformat-Sensor mit 6000 px Breite über 50 px. Konsequenz: jede ernsthafte 3D-Rekonstruktion (COLMAP, OpenMVG, OpenSfM) verwendet mindestens das Brown-Conrady-Modell K2; das ideale Pinhole ist ohne Korrektur nicht ausreichend.

3D. Die analytische Tiefenschärfe-Formel besteht den Selbstfalsifikations-Test eindeutig: an beiden Schärfentiefe-Rändern stimmt der berechnete Zerstreuungskreis mit der vorab gewählten Toleranz $c = 0,030$ mm auf 0,1% überein. Das ist die Konsistenz-Probe für die Implementation. Sie sagt nichts über den Geltungsbereich der Formel selbst — der ist durch die Annahmen aus Abschnitt 8 begrenzt.

Der gemeinsame Befund über die drei Stufen: **die einfache Form ist überall ein Spezialfall.** Im 1D-Fall ist die dünne Linse der Spezialfall verschwindender Dicke; im 2D-Fall ist das Pinhole der Spezialfall verschwindender Verzeichnung; im 3D-Fall ist die DoF-Formel selbstkonsistent, aber die Modellannahmen (kein Beugungslimit, paraxial) sind selbst Spezialfälle der vollständigen Wellenoptik. Wer eine Kamera quantitativ beschreibt, wählt den Spezialfall bewusst und nennt seine Toleranz.

12. Nächster Test

Stereo-Kamera-Setup als Brücke zur 3D-Rekonstruktion. Zwei Kameras im Abstand b (Basislinie), beide mit dem Pinhole-plus-Brown-Conrady-Modell aus diesem Test. Vorhersage: aus zwei korrigierten Bildern eines Welt-Punkts lässt sich der Tiefenwert Z rekonstruieren mit Genauigkeit proportional zu $f \cdot b / (Z^2 \cdot \sigma_d)$, wobei σ_d die Disparitäts-Messunsicherheit ist (typisch sub-pixel, etwa 0,1 px). Test gegen synthetische Punktwolke mit bekanntem Z , Toleranz $\varepsilon = 1\%$ relativer Tiefenfehler. Das Modul leitet direkt zu Modul 11 (Stereo) und zu Modul 12 (Volumen-Rekonstruktion) über.

Anhang A — Querverweise

- Strang-Index: STRANG-INDEX.md
- Plattform-Architektur: ../../naturwissenschaftliche-werkstatt/ARCHITEKTUR-Naturwissenschaftliche-Werkstatt-v0.1.md
- Zwei-Pfad-Architektur: ../../naturwissenschaftliche-werkstatt/ARCHITEKTUR-Zwei-Pfad-v0.1.md
- Praxis-Erklärung: PRAXIS-Kameramodell.md
- Begleitpapier: BEGLEITPAPIER-Kameramodell.md
- Werkzeug: kameramodell-werkzeug.html
- Code: kameramodell_simulation.py
- Ergebnisdaten: kameramodell_results.json
- Plots: kameramodell_1d_focal.svg, kameramodell_2d_projection.svg, kameramodell_3d_dof.svg

Anhang B — Externer Bestandscheck

Bestehende Werkzeuge, die das Kamera-Modell in Teilen abdecken:

- **OpenCV calib3d** — Pinhole + Brown-Conrady + Fish-Eye, Industriestandard für Kalibrierung.

- **COLMAP** — strukturierte Mehrkamera-Rekonstruktion mit SIMPLE_PINHOLE bis FULL_OPENCV-Modellen.
- **DoF Calculator** (FRAMOS, dofsimulator.net, andof, jherr/depth-of-field) — analytische Tiefenschärfe für Photographen.
- **PinholeCameraModel** (Python-Bibliothek) — Importer für OpenCV/ROS-Yamls.

Die Werkstatt-Notiz ergänzt diese durch das einheitliche Falsifikationsformat über die drei Stufen 1D, 2D, 3D und durch die Selbstkonsistenz-Probe der DoF-Berechnung. Für produktive 3D-Rekonstruktionen wird OpenCV oder COLMAP empfohlen; die Werkstatt erklärt, was diese Werkzeuge intern tun.

Anhang C — Quellen

- Brown, D. C. (1966). Decentering distortion of lenses. *Photogrammetric Engineering*, 32(3), 444–462.
- Conrady, A. E. (1919). Decentred lens-systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 79(5), 384–390.
- Hecht, E. (2017). *Optics*, 5. Auflage. Pearson, Kapitel 5–6.
- Born, M.; Wolf, E. (1999). *Principles of Optics*, 7. Auflage. Cambridge University Press, Kapitel 4.
- Hartley, R.; Zisserman, A. (2003). *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2. Auflage. Cambridge University Press.
- Zhang, Z. (2000). A flexible new technique for camera calibration. *IEEE TPAMI*, 22(11), 1330–1334. doi:10.1109/34.888718
- OpenCV documentation: https://docs.opencv.org/4.x/d9/d0c/group__calib3d.html (abgerufen Mai 2026).
- COLMAP camera models: <https://colmap.github.io/cameras.html> (abgerufen Mai 2026).

Wortzahl: ca. 1670 · Seiten: 6 · Version 0.1 · 2026-05-06