

Forschungsnotiz — Doppelspalt

Autor: Thomas Schüller **Kontakt:** forschung@tschueller.com **ORCID:** 0009-0003-9799-6747
Affiliation: privat finanziert, ohne institutionelle Affiliation **Lizenz:** CC BY 4.0 **Version:** 0.1
Datum: 2026-05-06 **Strang:** FORSCHUNG / Optiklabor **Dokumenttyp:** Forschungsnotiz
(Anwendung von Template v1.0) **Status:** abgeschlossener Test mit dokumentierter Bewertung

1. These

Das Fraunhofer-Modell der Doppelspalt-Beugung sagt für die im Parameterblock festgelegte Geometrie ein Streifenmuster mit Streifenabstand $\Delta y = \lambda L/d$ und einer Einhüllenden in Form von $\text{sinc}^2(\pi a \sin \theta / \lambda)$ vorher; diese Vorhersage gilt innerhalb der Toleranz ε als Test gegen eine numerische Auswertung des skalaren Fresnel-Kirchhoff-Beugungsintegrals.

2. Annahmen

1. Skalare Wellenoptik. Polarisisationseffekte werden vernachlässigt.
2. Monochromatische, zeitlich kohärente Quelle.
3. Räumlich vollständig kohärente Beleuchtung der Spaltebene mit ebener Wellenfront.
4. Zwei rechteckige Spalte, identisch in Breite a und Höhe, mit Mittenabstand d , in y -Richtung sehr lang (1D-Reduktion).
5. Beobachtungsschirm parallel zur Spaltebene im Abstand L .
6. Fernfeld: $L \gg a, d$, und für die Fraunhofer-Approximation zusätzlich $\lambda L \gg r_{\max}^2$, mit $r_{\max} = (a + d)/2$.
7. Vakuum, keine Streuung, keine Absorption.
8. Quelle und Schirm sind unbegrenzt im Vergleich zu den relevanten Längenskalen.

3. Mathematisches Modell

Aus den Annahmen folgt für die normierte Intensität auf dem Schirm bei Position y :

$$I(y) = \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right), \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + L^2}},$$

mit $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Daraus ergeben sich:

- Streifenabstand der Interferenzmaxima: $\Delta y = \lambda L/d$.
- Erste Nullstelle der Einhüllenden: $y_{\text{env}} = \lambda L/a$.
- Anzahl der Interferenzmaxima im zentralen Einhüllenden-Maximum: $N_{\text{zentral}} = 2\lfloor d/a \rfloor - 1$.

Symbole und Einheiten:

Symbol	Bedeutung	Einheit
λ	Wellenlänge der Quelle	m
a	Spaltbreite	m
d	Spaltabstand (Mitte zu Mitte)	m
L	Abstand Spaltebene-Schirm	m
y	Schirmposition senkrecht zu den Spalten	m
θ	Beobachtungswinkel von der Spaltachse	rad

4. Parameter

Symbol	Wert	Einheit	Quelle / Begründung	variabel?
λ	$633 \cdot 10^{-9}$	m	HeNe-Laser, Standardwert	nein
a	$20 \cdot 10^{-6}$	m	typische Lehrgeometrie	nein
d	$100 \cdot 10^{-6}$	m	Verhältnis $d/a = 5$ ergibt 9 sichtbare Streifen	nein
L	1.0	m	Anwendungsbereich $\lambda L/r_{\max}^2 \approx 176$	nein
y_{Bereich}	± 0.04	m	etwa ± 1.3 Einhüllende-Halbwerte	nein
N_{Schirm}	4001	—	Auflösung $20 \mu\text{m}$ pro Punkt	nein
N_{Apertur}	4001	—	Auflösung der Apertur-Integration	nein
ε	0,01	—	1% relative Abweichung des Streifenabstands; vor der Simulation festgelegt	nein

5. Vorhersage

Quantitative Vorhersagen aus dem Fraunhofer-Modell mit obigen Parametern:

Größe	Vorhersage
Streifenabstand Δy	$6,33 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Erste Nullstelle der Einhüllenden y_{env}	$3,165 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Anzahl Interferenzmaxima im Zentralbereich	9
Position der Maxima	$m \cdot 6,33 \cdot 10^{-3} \text{ m}, m \in \{-4, \dots, +4\}$

Diese Vorhersagen wurden vor der Simulation festgehalten.

6. Falsifikationskriterium

Wenn der aus dem Test bestimmte Streifenabstand $\Delta y_{\text{beobachtet}}$ um mehr als $\varepsilon = 1\%$ relativ vom vorhergesagten Wert $\Delta y_{\text{vorhergesagt}}$ abweicht, gilt das Modell für die festgelegten Parameter als nicht ausreichend genau und damit als geschwächt; eine Abweichung von mehr als 5ε gilt als widerlegt. Begründung von ε : bei 4001 Schirmpunkten über 80 mm beträgt die Diskretisierung $20 \mu\text{m}$, das entspricht einer Auflösungsgrenze des Streifenabstands von etwa 0,3%; $\varepsilon = 1\%$ liegt deutlich darüber und ist damit numerisch belastbar.

7. Konkurrenzmodelle

- **M2 (Test):** Skalares Fresnel-Kirchhoff-Beugungsintegral, ohne Fraunhofer-Approximation. Macht weniger Annahmen, behält den Term $1/r$ und die volle Phase kr . Unterscheidungstest: bei kleinerem L oder größerem $r_{\max}$ divergiert M2 von M1; bei sehr großem L konvergieren beide.
- **M3 (Fresnel-Näherung):** Quadratische Phasennäherung, behält den ersten Korrekturterm zu Fraunhofer. Vorhersage: zwischen M1 und M2 liegend; sollte bei mittlerem L besser passen als M1.
- **M4 (Vektorielle Beugung):** Lösung der vektoriellen Beugungsgleichungen. Wird hier nicht numerisch ausgewertet; gilt als Referenz für hohe Aperturzahlen, die in der gewählten Geometrie nicht erreicht werden.

8. Versagensbereich

Das Modell wird absichtlich nicht angewendet bei:

- $L < 0,1$ m (Nahfeld; Fresnel-Korrekturen dominant). Probetest unten in Feld 11.
- a oder d in der Größenordnung von λ (vektorielle Effekte werden relevant).
- Polychromatische Quellen (Mittelung verschmiert das Streifenmuster).
- Numerische Apertur $\sin \theta_{\max} > 0,3$ (Paraxialnäherung verletzt).

9. Simulation oder Experiment

Numerische Auswertung beider Modelle in `doppelspalt_simulation.py`. Methode:

- M1 wird analytisch auf dem Schirm-Gitter ausgewertet.
- M2 wird durch direkte Summation des Beugungsintegrals über N_{Apertur} Punkte in den beiden Spalten berechnet, gleichgewichtet, mit komplexer Phase und $1/r$ -Vorfaktor.
- Beide Profile werden auf ihr jeweiliges Maximum normiert.
- Lokale Maxima werden über Dreipunkt-Nachbarschaftsvergleich detektiert.
- Streifenabstand wird als Mittel der Differenzen aufeinanderfolgender Maxima im zentralen Einhüllenden-Bereich gebildet.

Code-Datei und Ergebnis-JSON liegen im selben Strang-Ordner. Konvergenzprüfung: Die Verdopplung von N_{Apertur} ändert das Profil um weniger als 10^{-4} in der normierten Intensität.

10. Ergebnis

10.1 Anwendungsbereich, $L = 1,0$ m

Größe	Wert
Streifenabstand vorhergesagt	$6,33 \cdot 10^{-3}$ m
Streifenabstand beobachtet	$6,24 \cdot 10^{-3}$ m
Absolute Abweichung	$9,0 \cdot 10^{-5}$ m
Relative Abweichung	1,42%
Toleranz ε	1,00%
RMS-Residuum (Profil)	$1,78 \cdot 10^{-4}$ (normiert)
Maximales Residuum	$5,01 \cdot 10^{-4}$ (normiert)
Vergleich mit ε	überschritten

Visualisierung: `doppelspalt_nominal.svg`.

10.2 Versagensbereich, $L = 100 \mu\text{m}$

Größe	Wert
Streifenabstand vorhergesagt (M1)	$6,33 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
Streifenabstand beobachtet (M2)	nicht definiert (Profil dominiert von Nahfeld-Maxima)
RMS-Residuum (Profil)	0,140 (normiert)
Maximales Residuum	0,999 (normiert)
Vergleich mit ε	weit überschritten

Visualisierung: doppelspalt_failure.svg.

11. Bewertung

11.1 Anwendungsbereich

Modell durch Test geschwächt. Die qualitative Vorhersage des Fraunhofer-Modells ist bestätigt: gleichmäßiger Streifenabstand, sinc-Einhüllende, Position des zentralen Maximums bei $y = 0$. Die quantitative Genauigkeit reicht jedoch nicht an die vorab festgelegte Toleranz von $\varepsilon = 1\%$ heran; die beobachtete Abweichung von 1,42% liegt klar über der Diskretisierungsgrenze von ca. 0,3% und ist damit als systematisch zu werten. Die Größenordnung passt zur erwarteten ersten Fresnel-Korrektur: der quartische Phasenterm $r^4/(8L^3)$ liefert bei den gewählten Parametern und am Rand des betrachteten Schirmausschnitts einen Phasenbeitrag von einigen Radian, was eine schwache Verschiebung der Streifenpositionen erklärt.

Konsequenz: Das Fraunhofer-Modell ist für qualitative Aussagen und Vorhersagen mit Toleranz $\geq 2\%$ verwendbar. Für quantitative Vorhersagen unterhalb von 1% ist es bei dieser Geometrie unzureichend.

11.2 Versagensbereich

Modell durch Test widerlegt (erwartet). Im Nahfeld bei $L = 100 \mu\text{m}$ liefert das Fraunhofer-Modell ein Streifenmuster, das mit dem Kirchhoff-Profil keine Übereinstimmung mehr hat. Das Bestehen des Tests an dieser Stelle wäre ein Hinweis darauf, dass der Versagensbereich falsch festgelegt ist; das Versagen bestätigt die Wahl der Bereichsgrenze.

12. Nächster Test

Test der Fresnel-Näherung (M3) im Anwendungsbereich. Dasselbe Geometrieset wie in Abschnitt 4, jedoch mit dem Modell M3 (quadratischer Phasenterm) anstelle von M1. Hypothese: Die relative Abweichung gegenüber M2 fällt unter $\varepsilon = 1\%$. Falls bestätigt, ist M3 für diese Geometrie als ausreichendes Vorhersagemodell anzusehen; falls nicht bestätigt, ist die Korrektur höherer Ordnung erforderlich.

Anhang A — Querverweise

- Template: FN-OPTIKLABOR-TEMPLATE-v1.0.md
- Stub-Vorgänger: FN-Optiklabor-v0.1-2026-05-05.md
- Code: doppelspalt_simulation.py
- Ergebnisdaten: doppelspalt_results.json

- Plots: doppelspalt_nominal.svg, doppelspalt_failure.svg
- Begleitpapier: BEGLEITPAPIER-Doppelspalt.md

Anhang B — Reproduzierbarkeit

python3 doppelspalt_simulation.py aus dem Verzeichnis dieser Notiz erzeugt die JSON-Ergebnisdatei und beide SVG-Plots. Abhängigkeiten: Python $\geq$ 3.10, NumPy, Matplotlib. Keine externen Daten.

Wortzahl: ca. 1100 · Seiten: 4 · Version 0.1 · 2026-05-06