

FN-Mechanik-Harmonischer-Oszillator-v0.1-2026-05-17

Forschungsnotiz — Harmonischer Oszillator

Autor: Thomas Schüller · forschung@tschueller.com · ORCID 0009-0003-9799-6747 **Affiliation:** privat finanziert, ohne institutionelle Affiliation **Lizenz:** CC BY 4.0 · **Version:** 0.1 · **Datum:** 2026-05-17
Strang: FORSCHUNG / Mechanik-Werkstatt / 03 Harmonischer Oszillator **Dokumenttyp:** Forschungsnotiz (Anwendung von Template v1.0) **Status:** abgeschlossener Test mit dokumentierter Bewertung

1. These

Der ideale ungedämpfte harmonische Oszillator $m\ddot{x} + kx = 0$ ist eine der wichtigsten Modellgleichungen der Physik: er beschreibt linear-rückstellende Kräfte und ist das mathematische Fundament aller Schwingungs- und Wellenphänomene (siehe Module Audio 02 Saitenschwingung, Audio 04 Resonanz, Optik 01 Doppelspalt). Diese Notiz prüft die These: **das ideale Modell besteht nur in einem schmalen Parameterregime; sobald Dämpfung, äußerer Antrieb oder nichtlineare Rückstellkraft hinzukommen, ist es widerlegt — aber auf drei strukturell verschiedene Arten.** Diese Untersuchung dient als methodischer Anker für alle Folgemodule, die den harmonischen Oszillator als Grundbaustein voraussetzen.

2. Annahmen

- Punktmasse m in einer Dimension, lineare Auslenkung x .
- Rückstellkraft proportional zur Auslenkung: $F = -kx$ (Hookesches Gesetz).
- Keine Reibung, kein Antrieb (für M1).
- Kleine Auslenkungen (für M1 Linearitätsannahme).
- Klassische Mechanik (keine Quanten-Effekte, keine Relativität).
- Konstante Materialparameter m , k .

3. Mathematisches Modell

M1 — idealer harmonischer Oszillator:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

Eigenschaften: Periode $T_0 = 2\pi/\omega_0$ unabhängig von Amplitude, Energie $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ konstant.

M2 — drei Erweiterungen:

A Dämpfung: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$.

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad E(t) \propto e^{-2\gamma t}.$$

B Antrieb: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t).$

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}.$$

Resonanz bei $\omega \approx \omega_0$ mit Halbwertsbreite $\sim 2\gamma$.

C Anharmonizität (Duffing): $m\ddot{x} + kx + \alpha x^3 = 0.$

Amplituden-abhängige Frequenz (Störungstheorie, kleine α):

$$\omega(A) \approx \omega_0 \sqrt{1 + \frac{3\alpha}{4k} A^2}.$$

Symbol	Bedeutung	Einheit
m	Masse	kg
k	Federkonstante	N/m
b	Dämpfungskonstante	Ns/m
α	Anharmonizitäts-Koeffizient	N/m ³
ω_0	Eigenkreisfrequenz	rad/s
γ	Dämpfungs-Rate	1/s
F_0	Anregungsamplitude	N

4. Parameter

Drei Szenarien:

Szene	m / kg	k / (N/m)	b / (Ns/m)	α / (N/m ³)	F_0 / N
A Dämpfung	1	39 ($\omega_0 = 2\pi$ rad/s, 1 Hz)	0	—	—
B Antrieb	1	39	0	—	1
C Duffing	1	39	—	79 ($\alpha = 2k$)	—

Toleranz vorab: $\epsilon = 1\%$ relative Abweichung in der primären Messgröße (Periode für A und C, Resonanz-Position für B). Begründung: 1% ist die übliche Werkstatt-Standard-Toleranz, kompatibel mit den anderen Modulen.

Zusätzliches Kriterium für A: Energieerhaltung. Wenn die Energie über eine Periode um mehr als 5% abfällt, ist M1 (Energieerhaltung) widerlegt.

5. Vorhersage

Szene	Erwartung
A Dämpfung	ω_d kaum unter ω_0 (kleine Dämpfung); aber Energie fällt deutlich ab →

	über Energie-Kriterium widerlegt
B Antrieb	M1 ungedämpft sagt $(A \rightarrow \infty)$ bei $(\omega = \omega_0)$ — physikalisch unmöglich; M2 zeigt endliche Resonanzkurve mit Peak nahe (ω_0) , FWHM $(\approx 2\gamma)$
C Duffing	Periode bei kleiner Amplitude $(\approx T_0)$; bei großer Amplitude deutlich kürzer (härtere Feder durch $(+\alpha x^3)$)

6. Falsifikationskriterium

M1 ist widerlegt, wenn eines der folgenden gilt:

- **A:** $(|T_{\text{gem}} - T_0|/T_0 > 1\%)$ **oder** $(E(T_0)/E(0) < 0{,}95)$.
- **B:** Die ungedämpfte Vorhersage $(A \rightarrow \infty)$ bei (ω_0) wird durch jede reale Messung widerlegt — das Kriterium ist hier eher qualitativ ("M1 sagt unphysikalisches voraus").
- **C:** $(|T(A_{\text{gross}}) - T(A_{\text{klein}})|/T(A_{\text{klein}}) > 1\%)$.

7. Konkurrenzmodelle

- **K1 — idealer Oszillator (M1).**
- **K2 — gedämpfter Oszillator (M2-A).**
- **K3 — getriebener Oszillator (M2-B).**
- **K4 — Duffing-Oszillator (M2-C):** $(\alpha > 0)$ harte Feder, $(\alpha < 0)$ weiche Feder.
- **K5 — Van-der-Pol-Oszillator:** nichtlineare Dämpfung, Grenzyklus.
- **K6 — Quantenharmonischer Oszillator:** diskrete Energieniveaus $(E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2))$ — gehört in eine Quanten-Werkstatt.
- **K7 — Mehr-Moden-System:** zwei oder mehr gekoppelte Oszillatoren — siehe Audio 04 Resonanz.

8. Versagensbereich

- **Große Amplituden:** Hookesches Gesetz versagt, $(F(x) = -kx)$ wird zu $(F(x) = -kx - \alpha x^3 - \dots)$
- **Schnelle Bewegung:** Reibung wird quadratisch in $(\dot{x})$ (Luftwiderstand).
- **Starkes Antrieb:** nichtlineare Resonanzen, subharmonische und superharmonische Antworten, chaotische Dynamik.
- **Sehr kleine Massen:** Quanten-Effekte (Nullpunkts-Energie).
- **Hohe Temperaturen:** (k) wird temperaturabhängig (z. B. Stahlfeder bei 800 °C).

9. Simulation

Numerische Auswertung in `harmonosc_simulation.py`:

- **A:** RK4-Integration über fünf Perioden, Messung der Periode aus

aufsteigenden Nulldurchgängen mit linearer Interpolation, Energie pro Zeitschritt.

- **B:** Analytische stationäre Amplitudenkurve $\langle A(\omega) \rangle$ über $\langle 0, 5\omega_0 \rangle$ bis $\langle 1, 5\omega_0 \rangle$, Vergleich gedämpft (M2) gegen ungedämpft (M1, $\gamma = 10^{-6}$).
- **C:** RK4-Integration für zwei Amplituden ($A = 0, 05$) m und $A = 1, 0$ m), Periode aus Nulldurchgängen.

Ergebnisse in harmonosc_results.json, Plots als harmonosc_A_damped.svg, harmonosc_B_driven.svg, harmonosc_C_duffing.svg.

10. Ergebnis

10.1 A Dämpfung

Größe	Wert
$\langle \omega_0 \rangle$	$\langle 6, 283 \rangle$ rad/s ($\langle 1, 000 \rangle$ Hz)
$\langle \omega_d \rangle$	$\langle 6, 280 \rangle$ rad/s
$\langle T_0 \rangle$ ideal	$\langle 1, 000 \rangle$ s
$\langle T \rangle$ gemessen	$\langle 1, 001 \rangle$ s
Relative Periode-Abweichung	$\langle 0, 05 \rangle \%$
$\langle E(T_0)/E(0) \rangle$	$\langle 0, 670 \rangle$
Bewertung	widerlegt (über Energie-Kriterium, nicht Frequenz)

10.2 B Antrieb

Größe	Wert
$\langle \omega_0 \rangle$	$\langle 6, 283 \rangle$ rad/s
Resonanz-Maximum bei	$\langle 6, 274 \rangle$ rad/s
Relative Peak-Position	$\langle 0, 15 \rangle \%$ unter $\langle \omega_0 \rangle$
FWHM $\langle / \omega_0 \rangle$	$\langle 6, 2 \rangle \%$
Bewertung M1 ungedämpft	widerlegt ($A \rightarrow \infty$) unphysikalisch)

10.3 C Duffing-Oszillator

Größe	Wert
$\langle T \rangle$ bei $A = 0, 05$ m	$\langle 0, 998 \rangle$ s
$\langle T \rangle$ bei $A = 1, 0$ m	$\langle 0, 637 \rangle$ s
Relative Verschiebung	$\langle 36, 2 \rangle \%$
Cent-Verschiebung	$\langle 777 \rangle$ Cent (gut sieben Halbtöne)
Bewertung	widerlegt (massiv)

Plots: harmonosc_A_damped.svg, harmonosc_B_driven.svg, harmonosc_C_duffing.svg.

11. Bewertung

A Dämpfung — widerlegt über das Energie-Kriterium, nicht über die Frequenz. Die Periode des gedämpften Oszillators ist nahezu identisch mit der ungedämpften ($\langle 0, 05 \rangle \%$ Abweichung), weil die Korrektur $\langle \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \rangle$ in

zweiter Ordnung klein ist. Das ist eine wichtige methodische Lektion: ein zu naives Frequenz-Kriterium würde M1 fast stützen, obwohl das Modell physikalisch falsch ist — die Energie ist nach einer Periode auf 67 % gefallen, also haben wir es ohne Frage mit einem gedämpften System zu tun. **Konsequenz für die Werkstatt:** ein gutes Falsifikationskriterium prüft mehrere Messgrößen, nicht nur die offensichtliche.

B Antrieb — M1 ist physikalisch unmöglich. Das ungedämpfte Modell sagt eine unendliche Amplitude bei der Resonanzfrequenz vorher, was kein reales System erreichen kann. Sobald irgendeine Reibung vorhanden ist, ist die Resonanzkurve endlich und hat eine wohldefinierte Halbwertsbreite ($\sim 2\gamma$). Dieses Modell ist die Grundlage aller Messverfahren mit Resonatoren — von der Stimmgabel über das LC-Filter bis zur NMR-Spektroskopie. Die Werkstatt-Werte ($\gamma/\omega_0 = 3\%$, FWHM $\{6\%$) sind typisch für mechanische Resonatoren. Eine hohe Güte ($Q = \omega_0/(2\gamma)$) groß ist erwünscht — sie macht das System empfindlich für die richtige Frequenz und unempfindlich für andere.

C Duffing — drastische Amplituden-abhängige Frequenz. Mit der gewählten Anharmonizität ($\alpha = 2k$), deutlich nichtlinear) verkürzt sich die Periode bei großer Amplitude auf (64%) der idealen Periode — die Frequenz steigt um über sieben Halbtöne. Das ist der physikalische Hintergrund des “pitch glide” beim Anschlag einer Saite (Modul 02): direkt nach dem Pluck-Vorgang ist die Auslenkung groß, die effektive Frequenz höher als die stationäre Frequenz, und sie sinkt während des Abklingvorgangs ab. Bei einer realen Gitarrensaite ist das oft 5–20 Cent über die ersten Sekunden.

Gemeinsamer Befund. Der ideale harmonische Oszillator ist überall ein Spezialfall — der Grenzfall verschwindender Dämpfung, verschwindenden Antriebs und verschwindender Nichtlinearität. Diese drei Erweiterungen sind nicht alternative Verallgemeinerungen, sondern jeweils unabhängige Achsen, entlang denen reale Systeme abweichen können. Ein Pendel im Schwerfeld zeigt alle drei gleichzeitig: Reibung am Aufhängungspunkt (A), Antrieb durch periodische Anregung (B) und Anharmonizität für große Amplituden (C, Pendel-Periode wächst mit Amplitude, $T \approx T_0(1 + \theta_0^2/16)$).

12. Nächster Test

Mechanik 04 Pendel. Spezialfall des harmonischen Oszillators mit nichtlinearer Rückstellkraft ($F = -mg\sin\theta$). Vorhersage: für kleine Auslenkungen ($\theta_0 \rightarrow 0$) identisch mit M1; für moderate Amplituden Periodenkorrektur nach der Borda-Reihe ($T = T_0(1 + \theta_0^2/16 + 11\theta_0^4/3072 + \dots)$). Test gegen exakte Lösung mit elliptischen Integralen. Brücke zu Modul 03 (Duffing als zweiter-Ordnungs-Approximation des Pendels) und zu Modul 05 Stoß (nicht-konservative Wechselwirkungen).

Anhang A — Querverweise

- Praxis-Erklärung: PRAXIS-Harmonischer-Oszillator.md (folgt)
- Begleitpapier: BEGLEITPAPIER-Harmonischer-Oszillator.md (folgt)
- Werkzeug: harmonosc-werkzeug.html (folgt)
- Code: harmonosc_simulation.py
- Plots: harmonosc_A_damped.svg, harmonosc_B_driven.svg, harmonosc_C_duffing.svg
- Ergebnisdaten: harmonosc_results.json
- **Methodischer Anker für:** Modul 02 Saitenschwingung, Modul 04 Resonanz, alle Schwingungsmodule.

- Verwandte Module: Mechanik 01 Hebel (statische Rückstellkraft), Audio 02–04, Optik 01 Doppelspalt.

Anhang B — Externer Bestandscheck

- **Goldstein, Poole, Safko (2002)** *Classical Mechanics* Kap. 6, vollständige Behandlung.
- **Landau & Lifschitz Bd. 1** §21–24: harmonische und anharmonische Schwingungen.
- **Strogatz (2014)** *Nonlinear Dynamics and Chaos* Kap. 5: getriebener Duffing.
- **PhET** “Masses and Springs” — didaktische Simulation, ohne Falsifikationsformat.
- **Falstad** “Coupled Oscillators” — interaktive Animation, mehrere Massen.
- **Insight Maker** und Wolfram-Demonstrations: Resonanzkurven, Duffing-Bifurkationen.

Was die Werkstatt-Notiz davon unterscheidet: drei separate Falsifikationsachsen (Dämpfung, Antrieb, Anharmonizität) in einer Notiz, Open-Source-Numerik, methodischer Hinweis auf Mehr-Kriterien-Falsifikation (Frequenz versus Energie), Brücke zu allen Schwingungs-Modulen.

Anhang C — Quellen

- Goldstein, H.; Poole, C. P.; Safko, J. L. (2002). *Classical Mechanics*, 3. Aufl. Addison-Wesley. Kap. 6.
- Landau, L. D.; Lifschitz, E. M. (1969). *Mechanik*, Bd. 1 von *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Akademie-Verlag. §21–24.
- Strogatz, S. H. (2014). *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 2. Aufl. Westview. Kap. 5.
- Duffing, G. (1918). *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz*. Vieweg.
- Symon, K. R. (1971). *Mechanics*, 3. Aufl. Addison-Wesley.