

Forschungsnotiz — Spektrum

Autor: Thomas Schüller **Kontakt:** forschung@tschueller.com **ORCID:** 0009-0003-9799-6747
Affiliation: privat finanziert, ohne institutionelle Affiliation **Lizenz:** CC BY 4.0 **Version:** 0.1
Datum: 2026-05-06 **Strang:** FORSCHUNG / Audio-Werkstatt **Dokumenttyp:** Forschungsnotiz
(Anwendung von Template v1.0) **Status:** abgeschlossener Test mit dokumentierter Bewertung

1. These

Die analytische Vorhersage des Frequenzspektrums eines reinen Sinus-Signals (eine Spektrallinie bei f_{Signal} mit Amplitude A_{Signal}) wird durch die diskrete Fourier-Transformation (DFT) bzw. ihre schnelle Implementation (FFT) innerhalb der Toleranz ε rekonstruiert, sofern die Signalfrequenz unterhalb der Nyquist-Frequenz liegt und auf einem ganzzahligen Vielfachen der Bin-Auflösung; außerhalb dieser Bedingungen treten systematische Abweichungen durch Spektral-Leakage und Aliasing auf, die in den Vorhersagen des erweiterten Modells (Fensterung, f_{alias}) explizit berücksichtigt sein müssen.

2. Annahmen

1. Lineares zeitinvariantes System.
2. Reelles Eingangssignal.
3. Periodisches Signal mit endlich vielen Frequenzkomponenten.
4. Quantisierungsfehler vernachlässigbar (idealisierte Floating-Point-Auswertung).
5. FFT-Normierung: einseitiges Amplitudenspektrum mit Vorfaktor $2/N$ (DC nicht verdoppelt).
6. Fenster-Korrektur per kohärentem Gewinn $1/(N \cdot \bar{w})$ bei gefenstertem Signal.
7. Sampling-Theorem: $f_{\text{Nyquist}} = f_s/2$.

3. Mathematisches Modell

Modell M1 — analytische Vorhersage. Für ein Signal $x(t) = A \sin(2\pi ft)$ gibt es genau eine Spektrallinie:

$$|X(f)|_{\text{einseitig}} = \begin{cases} A \cdot \delta(f - f_{\text{Signal}}) & \text{falls } f_{\text{Signal}} < f_{\text{Nyq}} \\ A \cdot \delta(f - f_{\text{alias}}) & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $f_{\text{alias}} = |f_{\text{Signal}} \bmod f_s - f_{\text{Nyq}} \cdot \mathbf{1}_{(f_s/2, f_s)}|$.

Modell M2 — DFT/FFT-Auswertung. Diskrete Auswertung von

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} w[n] x[n] e^{-2\pi i kn/N}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

mit Fensterfunktion $w[n]$ (Rechteck oder Hann) und Bin-Auflösung $\Delta f = f_s/N$. Für nicht-bin-zentrierte Signale entsteht spektrale Leakage über benachbarte Bins.

Symbol	Bedeutung	Einheit
f_{Signal}	Signalfrequenz	Hz
A_{Signal}	Signalamplitude	linear

Symbol	Bedeutung	Einheit
f_s	Sampling-Rate	Hz
N	Anzahl Samples im FFT-Fenster	—
Δf	Bin-Auflösung f_s/N	Hz
$w[n]$	Fensterfunktion	—

4. Parameter

Vier Probeläufe mit unterschiedlichen Parametern, Sampling-Rate und Dauer konstant:

Probe	f_{Signal}	Bin-zentriert	Fenster	Erwartung
Anwendungsbereich	1000 Hz	ja ($\Delta f = 1$ Hz)	Rechteck	M1 gestützt
Off-bin, kein Fenster	1000,5 Hz	nein	Rechteck	M1 in Amplitude geschwächt
Off-bin, Hann	1000,5 Hz	nein	Hann	M1 besser, aber noch geschwächt
Aliasing	30000 Hz	—	Rechteck	M1 sagt $f_{\text{alias}} = 18000$ Hz vorher; Test bestätigt

Konstante Parameter: $f_s = 48000$ Hz, $T_{\text{Mess}} = 1,0$ s, $N = 48000$, $\Delta f = 1$ Hz, $A_{\text{Signal}} = 1,0$.

Toleranzen vorab festgelegt: $\varepsilon_f = 0,1\%$ relative Frequenzabweichung; $\varepsilon_A = 5\%$ relative Amplitudenabweichung.

5. Vorhersage

Probe	$f_{\text{vorhergesagt}}$	$A_{\text{vorhergesagt}}$
Anwendungsbereich	1000,00 Hz	1,000
Off-bin (mit/ohne Fenster)	1000,50 Hz	1,000
Aliasing	18000,00 Hz	1,000

6. Falsifikationskriterium

Die Vorhersage ist gestützt, wenn beide Bedingungen gleichzeitig gelten: - Frequenzabweichung relativ $\leq \varepsilon_f = 0,1\%$ - Amplitudenabweichung relativ $\leq \varepsilon_A = 5\%$

Verletzung einer der beiden Toleranzen führt zur Bewertung "geschwächt"; gleichzeitige Verletzung beider zu "widerlegt". Begründung von ε_f : bei $\Delta f = 1$ Hz und Signalfrequenz 1000 Hz entspricht ein Bin einer relativen Abweichung von 0,1%; das ist die natürliche Auflösungsgrenze. Begründung von ε_A : kommerzielle Audio-Spektrumanalysatoren spezifizieren typischerweise $\pm 0,5$ dB ($\approx 6\%$); wir wählen 5% als geringfügig strenger.

7. Konkurrenzmodelle

- **K1 — analytische Vorhersage (M1):** das geprüfte Modell.
- **K2 — DFT/FFT mit Rechteck-Fenster (M2 ohne Fenster):** das Standard-Testmodell.

- **K3 — DFT/FFT mit Hann-Fenster (M2 mit Hann):** weiter gefasstes Testmodell, das Spektral-Leakage dämpft.
- **K4 — Zoom-FFT oder Chirp-Z-Transform:** behebt Bin-Auflösungsgrenzen lokal; nicht im Test verwendet.
- **K5 — Wigner-Ville-Verteilung:** Zeit-Frequenz-Darstellung für nicht-stationäre Signale; außerhalb des Geltungsbereichs für reine Sinus-Tests.

8. Versagensbereich

- Signalfrequenz nicht bin-zentriert: führt zu Leakage; Amplitudenfehler bis 36% ohne Fenster (siehe Ergebnis).
- Signalfrequenz oberhalb f_{Nyq} : führt zu Aliasing; das Modell sagt f_{alias} explizit vorher und ist insofern *nicht* widerlegt, sondern bestätigt im Aliasing-Bereich.
- Sehr kurze Messdauern ($N < 32$): DFT-Annahmen geraten in Konflikt mit der Periodizitäts-Voraussetzung.
- Stark transiente Signale: M1 ist nicht anwendbar, weil keine stationäre Spektrallinie vorliegt.
- Quantisierte Signale (geringe Bittiefe): Quantisierungsrauschen wird sichtbar; bei Floating-Point-Auswertung vernachlässigbar.

9. Simulation

Numerische Auswertung in `spektrum_simulation.py`. Für jeden Probelauf wird:

1. Ein Sinussignal mit den festgelegten Parametern erzeugt.
2. Optional ein Hann-Fenster angewandt mit kohärenter Gewinn-Korrektur.
3. Eine reelle FFT ausgewertet (`numpy.fft.rfft`).
4. Das Amplitudenspektrum normiert ($2 \cdot |X|/N$, DC nicht verdoppelt).
5. Der Spitzenwert detektiert.
6. Frequenz und Amplitude der Spitze gegen die Vorhersage verglichen.

Ergebnisse in `spektrum_results.json`. Plots in `spektrum_*.svg`.

10. Ergebnis

Probe	$f_{\text{beobachtet}}$	$\Delta f/f$	$A_{\text{beobachtet}}$	$\Delta A/A$	Bewertung
Anwendungsbereich	1000,00 Hz	0,00%	1,000	0,00%	gestützt widerlegt in Amplitude geschwächt in Amplitude gestützt (bei f_{alias})
Off-bin, kein Fenster	1000,00 Hz	0,05%	0,637	36,32%	
Off-bin, Hann	1001,00 Hz	0,05%	0,849	15,12%	
Aliasing	18000,00 Hz	0,00%	1,000	0,00%	

Visualisierungen: `spektrum_nominal_bin_centered.svg`, `spektrum_off_bin_no_window.svg`, `spektrum_off_bin_hann_window.svg`, `spektrum_aliasing.svg`.

11. Bewertung

11.1 Anwendungsbereich

M1 vollständig gestützt. Frequenz und Amplitude stimmen auf Floating-Point-Genauigkeit (10^{-16}) überein. Das ist nicht überraschend; bin-zentrierte Sinus-Signale sind der Idealfall der DFT, in dem alle Annahmen erfüllt sind. Der Test bestätigt vor allem, dass das verwendete Normierungsschema korrekt implementiert ist.

11.2 Off-bin ohne Fenster

M1 in der Frequenz gestützt, in der Amplitude widerlegt. Die Frequenzabweichung von 0,05% liegt unter ε_f , weil der Spitzenwert auf den nächstgelegenen bin "rastet". Die Amplitudenabweichung von 36,3% liegt weit über ε_A — das ist Spektral-Leakage. Der Effekt ist seit Harris 1978 quantitativ verstanden; das Test-Verfahren reproduziert ihn ordnungsgemäß.

11.3 Off-bin mit Hann-Fenster

M1 in der Amplitude geschwächt, aber nicht mehr widerlegt. Die Hann-Fensterung reduziert die Amplitudenabweichung von 36,3% auf 15,1%. Das ist konsistent mit dem in der Literatur dokumentierten Verhalten: die Hauptkeule des Hann-Fensters ist breiter als die des Rechtecks, dafür sind die Nebenkeulen um 32 dB statt 13 dB unterdrückt.

11.4 Aliasing

M1 vollständig gestützt — und das ist die nicht-triviale Bestätigung. Bei $f_{\text{Signal}} = 30$ kHz und $f_s = 48$ kHz liegt das Signal weit über $f_{\text{Nyq}} = 24$ kHz. Die Vorhersage von M1 sagt explizit, dass die Spitze nicht bei 30 kHz auftaucht, sondern bei $f_{\text{alias}} = 48 - 30 = 18$ kHz. Genau das wird beobachtet. Das ist die Selbstfalsifikations-Probe für die Aliasing-Behandlung in M1: hätte der Test eine Spitze bei 30 kHz oder anderswo gezeigt, wäre die Aliasing-Vorhersage von M1 widerlegt gewesen.

12. Nächster Test

Mehrtonsignal mit Inharmonizität. Ein Signal aus drei Sinussen mit Frequenzen $f_0, 2,001f_0, 3,005f_0$ (leicht inharmonisch, Klavier-Modell), Vorhersage: drei Spitzen mit erkennbaren Abweichungen vom harmonischen Raster. Test gegen die FFT desselben Signals. Erwartung: Leakage zwischen den Linien wird sichtbar, der Inharmonizitätskoeffizient ist aus dem Spektrum rekonstruierbar. Das Modul leitet direkt in Modul 03 (Klavier) über.

Anhang A — Querverweise

- Strang-Index Audio-Werkstatt: STRANG-INDEX.md
- Plattform-Architektur: ../naturwissenschaftliche-werkstatt/ARCHITEKTUR-Naturwissenschaftliche-Werkstatt-v0.1.md
- Template: ../hoehlengleichnis-optiklabor/00-template/FN-OPTIKLABOR-TEMPLATE-v1.0.md
- Bestehende Werkzeuge im Schichtwerk-Umfeld: SignalWerk Synth (Audio-Synthese), HornLab (Akustik-Konstruktion), MeasureLab (Messung).
- Code: spektrum_simulation.py
- Ergebnisdaten: spektrum_results.json
- Plots: spektrum_nominal_bin_centered.svg, spektrum_off_bin_no_window.svg, spektrum_off_bin_hann, spektrum_aliasing.svg

- Begleitpapier: BEGLEITPAPIER-Spektrum.md

Anhang B — Reproduzierbarkeit

python3 spektrum_simulation.py aus dem Verzeichnis dieser Notiz erzeugt die JSON-Ergebnisdatei und vier SVG-Plots. Abhängigkeiten: Python $\geq$ 3.10, NumPy, Matplotlib. Keine externen Daten.

Anhang C — Bedeutung für den Strang

Das Spektrum-Modul ist die Grundlage aller weiteren Audio-Module. Saitenschwingung (Modul 02), Klavier (Modul 03), Resonanz (Modul 04) und Modulation (Modul 05) liefern jeweils ein Signal, das spektral analysiert werden muss, um mit einem analytischen Modell verglichen zu werden. Das hier verbuchte Spektrum-Verfahren wird in allen folgenden Modulen als Schicht-A-Werkzeug (FFT mit Hann-Fenster) verwendet.

Anhang D — Quellen

- Harris, F. J. (1978). On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform. *Proceedings of the IEEE*, 66(1), 51–83. doi:10.1109/PROC.1978.10837
- Cooley, J. W., & Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90), 297–301.
- Nyquist, H. (1928). Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the AIEE*, 47(2), 617–644.
- Shannon, C. E. (1949). Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 37(1), 10–21.

Wortzahl: ca. 1280 · Seiten: 5 · Version 0.1 · 2026-05-06