

Forschungsnotiz — Saitenschwingung

Autor: Thomas Schüller · forschung@tschueller.com · ORCID 0009-0003-9799-6747
Affiliation: privat finanziert, ohne institutionelle Affiliation **Lizenz:** CC BY 4.0 · **Version:** 0.2 · **Datum:** 2026-05-17 **Strang:** FORSCHUNG / Audio-Werkstatt / 02 Saitenschwingung
Dokumenttyp: Forschungsnotiz (Anwendung von Template v1.0) **Status:** abgeschlossener Test mit dokumentierter Bewertung

1. These

Die Eigenfrequenzen einer ideal flexiblen, am Rand eingespannten Saite folgen dem Gesetz $f_n = (n/2L)\sqrt{T/\mu}$ und sind exakt harmonisch ($f_n = n \cdot f_1$). Reale Saiten mit nicht-vernachlässigbarer Biegesteifigkeit weichen davon systematisch ab; die Größe der Abweichung hängt vom Inharmonizitätskoeffizienten $B = \pi^3 E d^4 / (64 T L^2)$ ab und ist je nach Saitentyp musikalisch hörbar oder nicht. Erwartung: Nylon-Saiten einer Klassikgitarre fallen in den Geltungsbereich der idealen Wellengleichung; Stahl-Saiten einer E-Gitarre und insbesondere kurze, dicke Klavier-Bass-Saiten widerlegen das ideale Modell deutlich.

2. Annahmen

1. Saite ist homogen, lineare Massendichte $\mu = \rho \cdot \pi(d/2)^2$ folgt aus Materialdichte und Durchmesser.
2. Beide Enden sind fixiert (Dirichlet-Randbedingungen).
3. Saitenspannung T konstant, klein gegen die Zugfestigkeit.
4. Schwingung in einer Ebene; Polarisation und Doppelmoden nicht betrachtet.
5. Dämpfung vernachlässigt für die Frequenzbestimmung.
6. Saite ohne Umspinnung — Effekte umspinnener Bass-Saiten sind Gegenstand einer Erweiterung.

3. Mathematisches Modell

Modell M1 — ideale Saite (Wellengleichung). Aus $\partial^2 y / \partial t^2 = c^2 \partial^2 y / \partial x^2$ mit $c = \sqrt{T/\mu}$ folgen

$$f_n^{M1} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Modell M2 — Saite mit Biegesteifigkeit. Bei Hinzunahme der Biegeenergie (Fletcher & Rossing 1991):

$$f_n^{M2} = n \cdot f_1 \cdot \sqrt{1 + B n^2}$$

mit dem Inharmonizitätskoeffizienten

$$B = \frac{\pi^3 E d^4}{64 T L^2}.$$

Symbol	Bedeutung	Einheit
L	Saitenlänge	m
T	Saitenspannung	N
d	Saitendurchmesser	m
ρ	Materialdichte	kg/m ³
E	E-Modul des Materials	Pa
$\mu = \rho\pi(d/2)^2$	lineare Massendichte	kg/m
B	Inharmonizitätskoeffizient	— (dimensionslos)

Im Gegensatz zur ersten Fassung dieser Notiz werden die Materialwerte ρ und E jetzt direkt aus Standardtabellen entnommen, sodass μ und B nicht mehr ad hoc gewählt sind, sondern aus realen Saiten-Geometrien folgen.

4. Parameter

Saite	L / m	T / N	d / mm	ρ / (kg/m ³)	E / GPa
Nylon hohe E-Saite (Klassik)	0,650	70	0,71	1140	3,0
Stahl tiefe E-Saite (.046, E-Gitarre)	0,648	80	1,17	7850	200
Klavier-Bass C2 (massiver Stahl)	1,40	900	2,4	7850	200

Toleranz vorab: $\varepsilon_{\text{rel}} = 1\%$ relative Frequenzabweichung über alle Modi. Begründung: 1% entspricht musikalisch etwa 17 Cent, was an der Grenze des untrainierten Hörens liegt; die JND (just noticeable difference) für Tonhöhenunterschiede liegt bei mittleren Frequenzen bei etwa 10-20 Cent (Houtsma 1995). Wer den Unterschied nicht hört, kann ihn nicht musikalisch nutzen.

5. Vorhersage

Erwartung pro Saite (Größenordnung von B aus den Parametern):

Saite	B erwartet	Erwartete Inharmonizität bei $n = 8$
Nylon hohe E-Saite	$\sim 10^{-5}$	wenige Cent (M1 gestützt)
Stahl-E-Saite	$\sim 10^{-3}$	mehrere Halbtöne (M1 widerlegt)
Klavier-Bass	$\sim 10^{-3}$	über einen Halbton (M1 widerlegt)

6. Falsifikationskriterium

Maximale relative Frequenzabweichung zwischen f_n^{M1} und f_n^{M2} über die ersten acht Modi $> \varepsilon_{\text{rel}} = 1\% = \text{M1}$ widerlegt für diese Saite.

7. Konkurrenzmodelle

- **K1** ideale Saite (M1) — das geprüfte engere Modell.
- **K2** Saite mit Biegesteifigkeit (M2) — das verwendete Testmodell.
- **K3** Saite mit zusätzlicher Dämpfung — Linienbreite > 0 , aber Frequenzen kaum verschoben.
- **K4** Doppelpolarisation — Aufspaltung jeder Mode durch Asymmetrie der Anschlagebene.
- **K5** Nichtlineare Saite — bei großen Amplituden Amplituden-abhängige Frequenz ("pitch glide", Pluck-Initial).
- **K6** Umspinnene Saite — komplexer Aufbau mit Kern und Wicklung; in den Versagensbereich verschoben.

8. Versagensbereich

- Sehr kurze, dicke Saiten ($B > 10^{-2}$) — kein einfaches harmonisches Saitenmodell mehr.
- Sehr große Amplituden — nichtlineare Effekte.
- Umspinnene Bass-Saiten — Mehrschicht-Geometrie ändert effektive E und d .
- Saiten mit nicht-konstantem Durchmesser (Streckung, Knoten).
- Hohe Temperaturen — E und T ändern sich.

9. Simulation

Numerische Auswertung in `saitenschwingung_simulation.py`. Pro Saiten-Konfiguration werden die ersten acht Eigenfrequenzen nach M1 und M2 berechnet, die relative Abweichung pro Modus dokumentiert und in Cent umgerechnet ($1200 \cdot \log_2(f^{M2}/f^{M1})$). Ergebnisse in `saitenschwingung_results.json`. Plots pro Konfiguration (Frequenzen oben, Cent-Abweichung unten) als `saitenschwingung_*.svg`.

10. Ergebnis

10.1 Nylon hohe E-Saite

Größe	Wert
f_1	303,0 Hz
B	$1,25 \cdot 10^{-5}$
Max relative Abweichung (n=8)	0,040%
Max Cent-Abweichung	0,69 Cent
Bewertung	gestützt (weit unter $\varepsilon = 1\%$)

10.2 Stahl tiefe E-Saite (E-Gitarre)

Größe	Wert
f_1	75,1 Hz
B	$5,41 \cdot 10^{-3}$
Max relative Abweichung (n=8)	16,0%
Max Cent-Abweichung	257 Cent (über zwei Halbtöne)
Bewertung	widerlegt

10.3 Klavier-Bass-Saite C2

Größe	Wert
f_1	56,9 Hz
B	$1,82 \cdot 10^{-3}$
Max relative Abweichung (n=8)	5,67%
Max Cent-Abweichung	95 Cent (knapp ein Halbton)
Bewertung	widerlegt

Plots: `saitenschwingung_nylon_e_high.svg`, `saitenschwingung_steel_e_low.svg`, `saitenschwingung_piano_bass.svg`

11. Bewertung

Nylon E-Saite — M1 gestützt. Die berechnete Cent-Abweichung beim achten Oberton beträgt nur 0,69 Cent. Das liegt eine Größenordnung unter der psychoakustischen Hörschwelle. Konsequenz: für die Stimmung und das Spielen einer Klassikgitarre mit Nylon-Saiten ist die ideale Wellengleichung ausreichend, eine Inharmonizitäts-Korrektur ist nicht erforderlich.

Stahl E-Saite — M1 stark widerlegt. Die hohe Steifigkeit von Stahl bei gleichzeitig kleinem Durchmesser und kurzer Mensur erzeugt einen Inharmonizitätskoeffizienten $B \approx 5 \cdot 10^{-3}$. Beim achten Oberton liegt die Abweichung bei über zwei Halbtönen, was musikalisch dramatisch ist und bei harmonisch reichen Aufnahmen als "Schärfe" oder "Brillanz" hörbar wird. Konsequenz: präzise Stimmgeräte für E-Gitarre messen die einzelnen Oberton-Frequenzen mit FFT, nicht den Grundton allein.

Klavier-Bass — M1 widerlegt. Bei C2 ($f_1 \approx 57$ Hz) erreicht die Cent-Abweichung beim achten Oberton fast einen Halbton. Das ist der mathematische Hintergrund der bekannten "Railsback-Stretch"-Stimmung des Klaviers (Railsback 1938): Klaviere werden bewusst gestreckt gestimmt, um die Inharmonizität der Saiten zu kompensieren, und das höchste C wird etwa um 30 Cent höher gestimmt als rechnerisch nach gleichschwebender Temperatur.

Gemeinsamer Befund: die ideale Wellengleichung ist ein guter Spezialfall für sehr dünne, lange, weiche Saiten. Sobald ein Material mit hohem E -Modul (Stahl) bei kleiner Mensur eingesetzt wird, oder ein dicker Saitendurchmesser (Klavier-Bass) bei moderater Spannung, dominiert die Biegesteifigkeit. Das ist der Übergang zum Modul 03 (Klavier).

12. Nächster Test

Modul 03 Klavier mit umsponnenen Saiten. Bei realen Klavier-Bass-Saiten ist der Kern dünn und mit Kupfer umsponnen, was das effektive E reduziert und die akustische Wellengeschwindigkeit erhöht. Vorhersage: das einfache B -Modell von Modul 02 überschätzt die Inharmonizität umsponnener Saiten. Test gegen Literaturmessungen (Conklin 1996, Giordano & Korty 1996). Zusätzlich: Modul 04 Resonanz (Korpus-Kopplung), Modul 05 Modulation (Vibrato als Frequenz-Modulation der Grundmode).

Anhang A — Querverweise

- Praxis-Erklärung: `PRAXIS-Saitenschwingung.md`
- Code: `saitenschwingung_simulation.py`
- Plots: `saitenschwingung_nylon_e_high.svg`, `saitenschwingung_steel_e_low.svg`, `saitenschwingung_piano_bass.svg`
- Ergebnisdaten: `saitenschwingung_results.json`
- Begleitpapier: `BEGLEITPAPIER-Saitenschwingung.md` (noch zu schreiben)
- Werkzeug: `saitenschwingung-werkzeug.html` (noch zu bauen)

- Verwandte Module: 01-spektrum/ (FFT zur Verifikation), 03-klavier/ (folgender Strang, Inharmonizität als Hauptthema), Mechanik 03 Harmonischer Oszillator (Einzel-Mode als Grenzfall).

Anhang B — Externer Bestandscheck

- Fletcher & Rossing (1991): Lehrbuch-Implementierung der Inharmonizitätsformel.
- Rossing (Hrsg., 2007) Springer Handbook of Acoustics, Kapitel Strings.
- pianotuner.com, Verituner, TuneLab: kommerzielle Klavier-Stimmgeräte, alle mit Inharmonizitäts-Modell.
- Giordano & Korty (1996): Modellrechnung umspinnener Klaviersaiten.
- Conklin, H. (1996): Klavier-Bass-String-Design. JASA 99(5):3286.

Was die Werkstatt-Notiz davon unterscheidet: einheitliches Falsifikationsformat über drei reale Saiten-Konfigurationen mit vorab gewählter Toleranz, expliziter Versagensbereich, ohne Black-Box-Korrekturen.

Anhang C — Quellen

- Fletcher, N. H.; Rossing, T. D. (1991). *The Physics of Musical Instruments*. Springer. Kapitel 2.
- Morse, P. M.; Ingard, K. U. (1968). *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, Kapitel 4.
- Rossing, T. D. (Hg., 2007). *Springer Handbook of Acoustics*. Springer.
- Railsback, O. L. (1938). Scale Temperament as Applied to Piano Tuning. JASA 9(3):274. doi:10.1121/1.1915933
- Conklin, H. A. (1996). Design and tone in the mechanoacoustic piano. JASA 99(5):3286. doi:10.1121/1.414948
- Giordano, N.; Korty, A. (1996). Motion of a piano string. AJP 64(1):11. doi:10.1119/1.18225
- Houtsma, A. J. M. (1995). Pitch perception. In: Moore, B. C. J. (Hg.) *Hearing*. Academic Press.

Wortzahl: ca. 1370 · Seiten: 5 · Version 0.2 · 2026-05-17