

# Forschungsnotiz — Klavier (umspinnene Saiten)

**Autor:** Thomas Schüller · forschung@tschueller.com · ORCID 0009-0003-9799-6747  
**Affiliation:** privat finanziert, ohne institutionelle Affiliation **Lizenz:** CC BY 4.0 · **Version:** 0.1  
· **Datum:** 2026-05-17 **Strang:** FORSCHUNG / Audio-Werkstatt / 03 Klavier **Dokumenttyp:**  
Forschungsnotiz (Anwendung von Template v1.0) **Status:** abgeschlossener Test mit  
dokumentierter Bewertung

---

## 1. These

Modul 02 hat gezeigt, dass eine massive Stahl-Bass-Saite des Klaviers die ideale Wellengleichung deutlich widerlegt (Inharmonizität  $B \sim 10^{-3}$ , Cent-Abweichung beim achten Oberton fast ein Halbton). Diese Notiz prüft die These: **die im realen Klavierbau verwendeten umspinnenen Bass-Saiten reduzieren die Inharmonizität um genau jenen Faktor, der das ideale Saitenmodell wieder in den Geltungsbereich bringt.** Konkret: bei einer umspinnenen Saite mit Stahlkern und Kupfer-Wicklung trägt nur der Kerndurchmesser zur effektiven Biegesteifigkeit bei, während die Wicklung die effektive Massendichte erhöht. Das ergibt eine Reduktion der Inharmonizität um den Faktor  $(d_{\text{außen}}/d_{\text{Kern}})^4$ , ohne die Grundfrequenz wesentlich zu verändern.

## 2. Annahmen

1. Wicklung sitzt lose auf dem Kern und ist nicht biegesteif mit ihm gekoppelt (typische Konstruktion: einlagig gewickelter Kupferdraht, kraftschlüssig nur in Längsrichtung).
2. Effektive Biegesteifigkeit folgt aus dem Kern allein:  $EI_{\text{eff}} = E_{\text{Stahl}} \cdot I_{\text{Kern}}$ .
3. Effektive lineare Massendichte aus Kern plus Wicklungs-Ringquerschnitt:  $\mu_{\text{eff}} = \rho_{\text{Stahl}} A_{\text{Kern}} + \rho_{\text{Cu}} A_{\text{Wicklung}}$ .
4. Wellengeschwindigkeit aus Saitenspannung und  $\mu_{\text{eff}}$  (Wellengleichung der Modul-02-Form).
5. Saite ist homogen über die Länge (keine Endeffekte der Wicklung).
6. Spannung  $T$  konstant; Linearität.
7. Konvention für  $B$  konsistent mit Modul 02:  $f_n = n f_1 \sqrt{1 + B n^2}$ .

## 3. Mathematisches Modell

**M1 — massiv-äquivalente Stahl-Saite (Modul-02-Modell):** Eine massive Stahl-Saite mit Außendurchmesser  $d_{\text{außen}}$  derselben Länge  $L$  und Spannung  $T$  wie die umspinnene Saite.

$$\mu^{M1} = \rho_{\text{Stahl}} \pi (d_{\text{außen}}/2)^2, \quad f_1^{M1} = \frac{1}{2L} \sqrt{T/\mu^{M1}}, \quad B^{M1} = \frac{\pi^3 E_{\text{Stahl}} d_{\text{außen}}^4}{64 T L^2}.$$

**M2 — umspinnene Saite:** Kern mit Durchmesser  $d_{\text{Kern}}$ , äußere Wicklung bis Außendurchmesser  $d_{\text{außen}}$ .

$$\begin{aligned} A_{\text{Kern}} &= \pi (d_{\text{Kern}}/2)^2, & A_{\text{Wickl}} &= \pi (d_{\text{außen}}/2)^2 - A_{\text{Kern}}, \\ \mu^{M2} &= \rho_{\text{Stahl}} A_{\text{Kern}} + \rho_{\text{Cu}} A_{\text{Wickl}}, & f_1^{M2} &= \frac{1}{2L} \sqrt{T/\mu^{M2}}, \\ B^{M2} &= \frac{\pi^3 E_{\text{Stahl}} d_{\text{Kern}}^4}{64 T L^2}. \end{aligned}$$

| Symbol                                  | Bedeutung                      | Einheit           |
|-----------------------------------------|--------------------------------|-------------------|
| $L$                                     | schwingende Saitenlänge        | m                 |
| $T$                                     | Spannung                       | N                 |
| $d_{\text{außen}}$                      | Außendurchmesser               | mm                |
| $d_{\text{Kern}}$                       | Kerndurchmesser                | mm                |
| $\rho_{\text{Stahl}}, \rho_{\text{Cu}}$ | Materialdichten                | kg/m <sup>3</sup> |
| $E_{\text{Stahl}}$                      | E-Modul Stahl                  | Pa                |
| $\mu$                                   | effektive lineare Massendichte | kg/m              |
| $B$                                     | Inharmonizitätskoeffizient     | —                 |

Materialwerte:  $\rho_{\text{Stahl}} = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_{\text{Cu}} = 8960 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_{\text{Stahl}} = 200 \text{ GPa}$ .

**Schlüsselbeziehung:**  $B^{M1}/B^{M2} = (d_{\text{außen}}/d_{\text{Kern}})^4$ . Das ist der ingenieurtechnische Hebel der Umspinnung. Eine vierfache Verhältnisänderung im Durchmesser ergibt eine 256-fache Reduktion der Inharmonizität.

## 4. Parameter

Drei Klavier-Bass-Konfigurationen (typische Werte aus der Klavierbau-Literatur):

| Saite                        | $L / \text{m}$ | $T / \text{N}$ | $d_{\text{Kern}} / \text{mm}$ | $d_{\text{außen}} / \text{mm}$ | Faktor<br>$(d_{\text{a}}/d_{\text{k}})^4$ |
|------------------------------|----------------|----------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------------|
| C2 ( $\sim 65 \text{ Hz}$ )  | 1,40           | 900            | 1,0                           | 2,4                            | 33,2                                      |
| C3 ( $\sim 131 \text{ Hz}$ ) | 1,05           | 750            | 1,0                           | 1,7                            | 8,4                                       |
| C4 ( $\sim 262 \text{ Hz}$ ) | 0,50           | 700            | 0,95                          | 1,05                           | 1,5                                       |

Toleranz vorab:  $\varepsilon = 1\%$  relative Frequenzabweichung über die ersten acht Modi ( $\approx 17 \text{ Cent}$ , JND-Schwelle).

## 5. Vorhersage

| Saite | $B^{M1}$ erwartet | $B^{M2}$ erwartet | $B$ -Reduktion    |
|-------|-------------------|-------------------|-------------------|
| C2    | $\sim 10^{-3}$    | $\sim 10^{-5}$    | Faktor $\sim 33$  |
| C3    | $\sim 10^{-3}$    | $\sim 10^{-4}$    | Faktor $\sim 8$   |
| C4    | $\sim 10^{-3}$    | $\sim 10^{-3}$    | Faktor $\sim 1,5$ |

Erwartete Bewertung: M1 in allen Fällen widerlegt (massive Saiten gleichen Außendurchmessers wären inhämonisch); M2 für C2 und C3 gestützt, für C4 möglicherweise widerlegt (Übergangsbereich, dünne Umspinnung).

## 6. Falsifikationskriterium

Maximale relative Frequenzabweichung zwischen  $f_n$  und  $n \cdot f_1$  über die ersten acht Modi  $> \varepsilon = 1\% \Rightarrow$  Modell für diese Saite widerlegt.

Zusätzlich: Das **Reduktionsverhältnis**  $B^{M1}/B^{M2} = (d_{\text{außen}}/d_{\text{Kern}})^4$  ist die zentrale Vorhersage des M2-Modells. Stimmt die numerische Auswertung mit dieser geschlossenen Formel überein, ist das Modell intern konsistent.

## 7. Konkurrenzmodelle

- **K1 — massive Saite (M1):** das geprüfte engere Modell.
- **K2 — Kern-only-Biegesteifigkeit (M2):** das verwendete Testmodell. Conklin (1996), Giordano & Korty (1996).
- **K3 — Kern-und-Wicklung gekoppelt:** wenn die Wicklung biegesteif mit dem Kern verbunden wäre (vergossen, gelötet), würde  $EI_{\text{eff}}$  deutlich höher liegen. Modell-Erweiterung mit gekoppelten Schichten, Verbundbalken-Theorie.
- **K4 — Mehrlagige Wicklung:** doppelt umspinnene Bass-Saiten (z. B. tiefste Klaviersaiten) mit zusätzlicher äußerer Schicht. Das verändert  $\mu_{\text{eff}}$ , nicht  $B$ .
- **K5 — Anharmonizität durch Hammeranschlag:** der Hammer prägt der Saite ein nicht-perfekt-sinusoidales Initial-Spektrum auf. Das ändert die Klangfarbe, aber nicht die Eigenfrequenzen.
- **K6 — Saiten-Korpus-Kopplung:** der Steg überträgt Schwingung auf den Resonanzboden. Eigenfrequenzen werden leicht verschoben (mode-coupling). Modul 04 Resonanz.

## 8. Versagensbereich

- **Mehrlagig umspinnene Saiten** mit nicht-trivialem Wicklungsaufbau (Bass-Tonbereich C1 und tiefer beim Konzertflügel).
- **Sehr alte Saiten** mit korrodierter oder gelockerter Wicklung — Biegesteifigkeit kann durch nachgebende Wicklung verändert sein.
- **Saiten unter sehr hoher Spannung** an der Streckgrenze des Stahls —  $E$  wird nichtlinear.
- **Plastik-Wicklungen** (Gitarre, manche elektronische Klaviere) — andere Materialkonstanten, eigene Rechnung nötig.
- **Asymmetrische Wicklung** (Hexcore-Saiten der E-Gitarre) —  $I_{\text{Kern}}$  nicht kreisförmig.

## 9. Simulation

Numerische Auswertung in `klavier_simulation.py`. Pro Konfiguration (C2, C3, C4):

1. Berechnung von  $\mu^{M1}$  für massive Stahl-Saite gleichen Außendurchmessers.
2. Berechnung von  $\mu^{M2}$  für umspinnene Saite (Kern Stahl + Wicklung Kupfer).
3. Berechnung von  $B^{M1}$  und  $B^{M2}$  nach den Formeln aus Abschnitt 3.
4. Auswertung der ersten acht Eigenfrequenzen  $f_n = n f_1 \sqrt{1 + B n^2}$  für beide Modelle.
5. Cent-Abweichung pro Modus gegen die ideale Harmonische.
6. Reduktionsfaktor  $\text{Cent}^{M1} / \text{Cent}^{M2}$ .

Ergebnisse in `klavier_results.json`. Plots pro Saite (Cent-Abweichung oben, Reduktionsfaktor unten) als `klavier_C2.svg`, `klavier_C3.svg`, `klavier_C4.svg`.

## 10. Ergebnis

### 10.1 C2 (Bass-Saite, $\sim 65$ Hz)

| Größe                     | M1 massiv-äquivalent | M2 umspinnen                            |
|---------------------------|----------------------|-----------------------------------------|
| $f_1$                     | 56,9 Hz              | 53,8 Hz                                 |
| $B$                       | $1,82 \cdot 10^{-3}$ | $5,49 \cdot 10^{-5}$                    |
| Cent-Abweichung bei $n=8$ | 95,5 Cent            | 3,0 Cent                                |
| Bewertung                 | <b>widerlegt</b>     | <b>gestützt</b>                         |
| Reduktionsfaktor          | $31,4 \times$        | (vorhergesagt<br>$(2,4/1,0)^4 = 33,2$ ) |

## 10.2 C3 (mittlere Bass-Saite, $\sim 131$ Hz)

| Größe                     | M1 massiv            | M2 umspinnen                           |
|---------------------------|----------------------|----------------------------------------|
| $f_1$                     | 97,7 Hz              | 93,5 Hz                                |
| $B$                       | $9,79 \cdot 10^{-4}$ | $1,17 \cdot 10^{-4}$                   |
| Cent-Abweichung bei $n=8$ | 52,6 Cent            | 6,5 Cent                               |
| Bewertung                 | <b>widerlegt</b>     | <b>gestützt</b>                        |
| Reduktionsfaktor          | $8,1\times$          | (vorhergesagt<br>$(1,7/1,0)^4 = 8,4$ ) |

## 10.3 C4 (Übergangsbereich, $\sim 262$ Hz)

| Größe                     | M1 massiv            | M2 dünn umspinnen                         |
|---------------------------|----------------------|-------------------------------------------|
| $f_1$                     | 320,9 Hz             | 316,9 Hz                                  |
| $B$                       | $6,73 \cdot 10^{-4}$ | $4,51 \cdot 10^{-4}$                      |
| Cent-Abweichung bei $n=8$ | 36,5 Cent            | 24,6 Cent                                 |
| Bewertung                 | <b>widerlegt</b>     | <b>widerlegt</b>                          |
| Reduktionsfaktor          | $1,48\times$         | (vorhergesagt<br>$(1,05/0,95)^4 = 1,49$ ) |

Plots: klavier\_C2.svg, klavier\_C3.svg, klavier\_C4.svg.

## 11. Bewertung

**Die Vorhersage des M2-Modells ist quantitativ bestätigt: Reduktionsfaktoren stimmen mit der geschlossenen Formel  $(d_{\text{außen}}/d_{\text{Kern}})^4$  auf 1-6% überein.** Die kleinen Abweichungen entstehen, weil  $f_1$  zwischen M1 und M2 leicht unterschiedlich ist (umspinnene Saite hat höheres  $\mu$ , also tieferes  $f_1$ ); die Cent-Berechnung ist relativ und damit doppelt skaliert. Innerhalb dieser Auflösung ist das Modell selbstkonsistent.

**Praktische Konsequenz für den Klavierbau:** Die Umspinnung ist nicht Dekoration und nicht reine Massen-Erhöhung. Sie ist der entscheidende Mechanismus, der überhaupt erst musikalisch verwendbare tiefe Klaviertöne ermöglicht. Eine hypothetische massive Bass-Saite mit C2-Frequenz und 2,4 mm Durchmesser wäre wegen ihrer Inharmonizität von 95 Cent über die ersten acht Obertöne als Klavier-Bass musikalisch unbrauchbar — der achte Oberton läge fast einen Halbton zu hoch.

**Bei C4 (Übergangsbereich) ist M2 nicht mehr ausreichend.** Die dünn umspinnene Saite hat nur einen Außen-Kern-Quotienten von 1,10, was nur Faktor 1,5 Reduktion bringt. Hier reichen 24,6 Cent Abweichung beim achten Oberton noch über  $\varepsilon$ . Im realen Klavier wird der Übergang von umspinnenen zu massiven Saiten genau hier vollzogen — und Inharmonizität bleibt eine Eigenschaft, die durch die Railsback-Stretch-Stimmung kompensiert werden muss (siehe Modul 02 Bewertung).

**Zentrale Aussage:** das einfache, kostengünstige ingenieurtechnische Verfahren der Umspinnung — ein dünner Stahlkern mit darum gewickeltem Kupferdraht — folgt nicht aus Tradition oder Materialvorräten, sondern aus einer harten physikalischen Notwendigkeit. Die Mathematik der Biegesteifigkeit von Saiten lässt keine andere Wahl, wenn man musikalisch verwendbare Bass-Töne auf Saiten unterhalb von etwa 1,5 m Länge erzeugen will. Das ist der mathematische Hintergrund einer Konstruktionsentscheidung, die der Klavierbau seit dem späten 18. Jahrhundert kennt.

## 12. Nächster Test

**Modul 04 Resonanz und Steg-Kopplung.** Die Bass-Saiten werden über den Steg auf den Resonanzboden gekoppelt. Die Eigenfrequenzen der Saiten und die Resonanzen des Korpus interagieren; bei bestimmten Konstruktionen entstehen sogar “Phantom-Töne” (kombination-tones) durch nichtlineare Steg-Kopplung. Vorhersage: bei guter Kopplung sind die Saiten-Eigenfrequenzen leicht verschoben gegenüber der freien Saite (ein bis zwei Cent); bei resonanten Korpus-Moden in der Nähe einer Saiten-Mode sind die Verschiebungen größer. Test gegen Literatur (Weinreich 1977, “Coupled piano strings”). Zusätzlich: Modul 05 Modulation (Vibrato, Tremolo) und Modul 06 (Klangkörper Anschlag-Anregung).

---

## Anhang A — Querverweise

- Praxis-Erklärung: PRAXIS-Klavier-Umspinnung.md
- Begleitpapier: BEGLEITPAPIER-Klavier-Umspinnung.md (folgt)
- Werkzeug: klavier-werkzeug.html (folgt)
- Code: klavier\_simulation.py
- Plots: klavier\_umspinnung\_C2.svg, klavier\_umspinnung\_C3.svg, klavier\_umspinnung\_C4.svg
- Ergebnisdaten: klavier\_results.json
- Komplementärer Pfad: FN-Audio-Klavier-Stretch-v0.1-2026-05-06.md + PRAXIS-Klavier-Stretch.md
- Vorgänger-Modul: 02-saitenschwingung/FN-Audio-Saitenschwingung-v0.2-2026-05-17.md
- Verwandte Module: 01 Spektrum (FFT), 04 Resonanz (folgt), Mechanik 03 Harmonischer Oszillator.

## Anhang B — Externer Bestandscheck

- **Fletcher & Rossing (1991)** Kapitel 12: Klaviersaiten, Bass-Konstruktion.
- **Conklin (1996)** JASA: detaillierte Diskussion umspinnener Klaviersaiten.
- **Giordano & Korty (1996)** AJP: numerische Modellierung mit FEM.
- **Weinreich (1977)** SciAm und JASA: Kopplung gestimmter Saitenpaare (relevant für Modul 04).
- **Pianoteq** (Modartt): kommerzielles physikalisches Klaviermodell mit Inharmonizität.
- **Verituner, TuneLab, Cybertuner:** Klavier-Stimmgeräte mit individueller  $B$ -Messung pro Saite.

Was die Werkstatt-Notiz davon unterscheidet: Open-Source-Numerik, einheitliches Falsifikationsformat, expliziter Versagensbereich, geschlossene Formel für den Reduktionsfaktor, Brücke zur Praxis-Erklärung mit Hörselbsttest.

## Anhang C — Quellen

- Fletcher, N. H.; Rossing, T. D. (1991). *The Physics of Musical Instruments*. Springer. Kap. 12.
  - Conklin, H. A. (1996). Design and tone in the mechanoacoustic piano. JASA 99(5):3286. doi:10.1121/1.414948
  - Giordano, N.; Korty, A. (1996). Motion of a piano string. AJP 64(1):11. doi:10.1119/1.18225
  - Weinreich, G. (1977). Coupled piano strings. JASA 62(6):1474. doi:10.1121/1.381677
  - Railsback, O. L. (1938). Scale Temperament as Applied to Piano Tuning. JASA 9(3):274. doi:10.1121/1.1915933
  - Houtsma, A. J. M. (1995). Pitch perception. In: Moore (Hg.) *Hearing*. Academic Press.
-

