

# Forschungsnotiz — Klavier

## Inharmonizität durch Biegesteifigkeit, Railsback-Effekt

---

**Autor:** Thomas Schüller · forschung@tschueller.com · ORCID 0009-0003-9799-6747  
**Affiliation:** privat finanziert, ohne institutionelle Affiliation **Lizenz:** CC BY 4.0 · **Version:** 0.1  
· **Datum:** 2026-05-06 **Strang:** FORSCHUNG / Audio-Werkstatt / 03 Klavier **Dokumenttyp:**  
Forschungsnotiz (Anwendung von Template v1.0) **Status:** abgeschlossener Test mit  
dokumentierter Bewertung

---

### 1. These

Klaviersaiten weisen aufgrund ihrer Biegesteifigkeit eine messbare Inharmonizität auf, die mit der Lage der Note (Grundfrequenz) wächst; in mittleren und hohen Lagen übersteigt die Inharmonizität die psychoakustische Hörschwelle deutlich und erklärt die in der Praxis eingesetzte "gestreckte Stimmung" (Railsback-Kurve, Railsback 1938).

### 2. Annahmen

Identisch zu Modul 02 (Saitenschwingung), mit zwei Erweiterungen: 1. Inharmonizitätskoeffizient  $B$  ist nicht vernachlässigbar. 2. Hörschwelle für Tonhöhenabweichungen liegt bei etwa 5 Cents (Stevens, Volkman & Newman 1937; ASA 2013).

### 3. Mathematisches Modell

**Modell M1.** Ideale Saite wie in Modul 02:

$$f_n^{M1} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

**Modell M2.** Saite mit Biegesteifigkeit:

$$f_n^{M2} = f_n^{M1} \sqrt{1 + B n^2}$$

mit  $B = \pi^2 EI / (TL^2) = \pi^2 E \pi d^4 / (64 TL^2)$  für einen runden Saitenquerschnitt mit Durchmesser  $d$ .

Inharmonizität in Cents pro Modus:

$$\Delta_n^{\text{Cents}} = 1200 \log_2 \left( \frac{f_n^{M2}}{f_n^{M1}} \right) = 600 \log_2 (1 + B n^2).$$

### 4. Parameter

Zwei reale Klaviersaiten-Konfigurationen:

| Konfiguration | $L$    | $T$   | $\mu$                        | $B$               | $f_1$   |
|---------------|--------|-------|------------------------------|-------------------|---------|
| C4 (Mittel-C) | 0,62 m | 720 N | $6,78 \cdot 10^{-3}$<br>kg/m | $4 \cdot 10^{-4}$ | 262 Hz  |
| C7            | 0,05 m | 720 N | $1,64 \cdot 10^{-2}$<br>kg/m | $2 \cdot 10^{-3}$ | 2093 Hz |

Toleranz vorab:  $\varepsilon_{\text{Cents}} = 5$  Cents.

## 5. Vorhersage

| Saite                        | $\Delta_2$ | $\Delta_5$ | $\Delta_{10}$ |
|------------------------------|------------|------------|---------------|
| C4 ( $B = 4 \cdot 10^{-4}$ ) | 1,4        | 8,6        | 34            |
| C7 ( $B = 2 \cdot 10^{-3}$ ) | 6,9        | 42         | 104           |

C7 wird hier nur bis Modus 8 ausgewertet, weil höhere Obertöne über 16 kHz und damit jenseits des Hörbereichs liegen.

## 6. Falsifikationskriterium

Die Aussage "Klaviersaiten zeigen messbare Inharmonizität" gilt als gestützt, wenn mindestens einer der zehn untersuchten Modi pro Saite eine Cents-Abweichung über  $\varepsilon = 5$  Cents zeigt. Die Aussage gilt als widerlegt, wenn alle Modi unter 5 Cents bleiben.

## 7. Konkurrenzmodelle

- K1 ideal harmonisch (M1).
- K2 Biegesteifigkeit erster Ordnung (M2, hier verwendet).
- K3 zusätzliche Korrektur durch Doppelpolarisation und Saiten-Steg-Kopplung.
- K4 Numerische Lösung der vollen Bernoulli-Euler-Gleichung mit gespannter Saite (nichtlinear).

## 8. Versagensbereich

- Sehr tiefe Bass-Saiten mit Umwicklung:  $B$  ist dort gering, weil die Wicklung  $\mu$  erhöht ohne  $EI$  stark zu erhöhen. M2 sollte dort auf M1 hinauslaufen.
- Höhe Modi über der Hörgrenze ( $> 16 - 20$  kHz): nicht relevant für das Praxisproblem Stimmung.
- Anschlag-Transient: für die ersten  $\sim 50$  ms nach dem Hammeranschlag dominiert nichtlineares Verhalten; M2 beschreibt den stationären Klang.

## 9. Simulation

saite\_simulation.py wertet M1 und M2 für beide Saiten aus, berechnet die Cents-Abweichung pro Modus, und produziert je einen Plot.

## 10. Ergebnis

### C4

| Modus | $f^{M1}$ | $f^{M2}$ | Cents |
|-------|----------|----------|-------|
| 1     | 262,80   | 262,86   | 0,35  |
| 5     | 1314,01  | 1320,57  | 8,63  |
| 10    | 2628,03  | 2679,81  | 33,95 |

Maximale Cents-Abweichung über 10 Modi: 33,95.

### C7

| Modus | $f^{M1}$ | $f^{M2}$ | Cents  |
|-------|----------|----------|--------|
| 1     | 2095,29  | 2097,39  | 1,73   |
| 4     | 8381,16  | 8513,53  | 27,19  |
| 8     | 16762,33 | 17801,99 | 104,26 |

Maximale Cents-Abweichung über 8 Modi: 104,26 (mehr als ein Halbton).

Plots: klavier\_stretch\_c4.svg, klavier\_stretch\_c7.svg.

## 11. Bewertung

**These vollständig gestützt.** Beide Klaviersaiten zeigen Inharmonizitäten weit über  $\varepsilon = 5$  Cents: - C4: bereits beim 4. Modus mit etwa 5,5 Cents knapp über der Hörschwelle, beim 10. Modus mit 34 Cents deutlich hörbar. - C7: schon beim 2. Modus mit 7 Cents über der Hörschwelle, beim 8. Modus mit über 100 Cents — mehr als ein Halbton.

**Praktische Konsequenz: gestreckte Stimmung.** Wer ein Klavier so stimmt, dass die Grundtöne mathematisch reine Oktaven bilden ( $f_2 = 2f_1$ ), bekommt im Klang Schwebungen, weil der zweite Oberton von Note A *nicht* mit der Grundfrequenz von Note A' im selben Verhältnis steht. Klavierstimmer kompensieren das, indem sie die Oktaven leicht "strecken" — die obere Note wird etwas höher gestimmt, als es ein gleichstufiger Halbton-Berechnung vorgibt. Das ist die Railsback-Kurve, empirisch dokumentiert seit 1938 (Railsback 1938) und in moderner Form bei Schuck & Young (1943) sowie Fletcher (1964).

Diese Kurve ist nicht ein Stimmgeschmack, sondern eine direkte physikalische Konsequenz aus der Biegesteifigkeit der Saiten. Ein elektronisches Stimmgerät, das keine Inharmonizitäts-Korrektur kennt, stimmt Klaviere falsch — wahrnehmbar falsch.

## 12. Nächster Test

Empirische Verifikation an einer realen Klaviersaite: Aufnahme einer C4 oder C7 mit hoher Sample-Rate, FFT, Vergleich der Spektrallinien-Positionen mit der M2-Vorhersage. Erwartung: die Cents-Abweichung der gemessenen Obertöne entspricht der vorhergesagten innerhalb  $\pm 3$  Cents. Werkzeug: spektrum-werkzeug.html aus Modul 01.

## Anhang — Querverweise

- Praxis-Erklärung: PRAXIS-Klavier.md
- Code: ../02-saitenschwingung/saite\_simulation.py (gemeinsam mit Modul 02)
- Daten: klavier\_results.json
- Plots: klavier\_stretch\_c4.svg, klavier\_stretch\_c7.svg

## Quellen

- Railsback, O. L. (1938). Scale temperament as applied to piano tuning. *Journal of the Acoustical Society of America*, 9(3), 274.
- Schuck, O. H.; Young, R. W. (1943). Observations on the vibrations of piano strings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 15(1), 1-11. doi:10.1121/1.1916221
- Fletcher, H. (1964). Normal vibration frequencies of a stiff piano string. *Journal of the Acoustical Society of America*, 36(1), 203-209. doi:10.1121/1.1918947
- Fletcher, N. H.; Rossing, T. D. (1991). *The Physics of Musical Instruments*. Springer, Kapitel 12.
- Stevens, S. S.; Volkman, J.; Newman, E. B. (1937). A scale for the measurement of the psychological magnitude pitch. *Journal of the Acoustical Society of America*, 8(3), 185-190.

---

Wortzahl: ca. 950 · Seiten: 3 · Version 0.1 · 2026-05-06